Основы математики

Часть 2

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Уральский государственный педагогический университет»
Институт педагогики и психологии детства
Кафедра теории и методики обучения математике и информатике
в период детства

Основы математики

Учебное пособие

Для студентов по направлению
44.03.01 – «Педагогическое образование»

Часть 2

Екатеринбург 2015

УДК 372.851
ББК Ч426.25
О 75

Рекомендовано Ученым советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования
«Уральский государственный педагогический университет»
в качестве учебного издания (решение от 01.09.2015 №409)

Авторы-составители:
доктор педагогических наук, профессор Л. В. Воронина,
доцент Г. В. Воробьева,
кандидат педагогических наук, профессор Г. П. Калинина,
старший преподаватель Е. А. Утюмова

Рецензенты:
доктор педагогических наук,
профессор С. А. Новоселов,
кандидат физико-математических наук,
доцент Т. А. Унегова

О 75 **Основы математики** : учеб. пособие для студентов по направлению 44.03.01 – «Педагогическое образование». В 2 ч. Ч. 2. / Л. В. Воронина, Г. В. Воробьева, Г. П. Калинина, Е. А. Утюмова. – Екатеринбург : ФГБОУ ВПО УрГПУ, 2015. – 279 с.
ISBN 978-7186-0689-8(общий)
ISBN 978-7186-0694-2(часть 2)

Пособие составлено в соответствии с программой курса «Математика», разработанной в цикле общепрофессиональных дисциплин, по направлению 44.03.01 – «Педагогическое образование» для профиля «Начальное образованиие». Данное пособие знакомит будущих учителей начальных классов с научными основами начального курса математики.

Материалы могут быть использованы в работе со студентами и других специальностей.

УДК 372.851
ББК Ч426.25

ISBN 978-7186-0689-8(общий)
ISBN 978-7186-0694-2(часть 2)

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее время большое внимание уделяется всестороннему развитию ребенка периода детства средствами каждого предмета, в связи с чем огромная роль отводится математике. Говоря об основных целях изучения математики в начальной школе, прежде всего, следует отметить:

- развитие логического мышления ребенка;
- приобретение им прочных знаний основ математической науки, необходимых для продолжения образования;
- понимание детьми прикладного значения математики.

Исходя из указанных целей, можно сформулировать следующие основные задачи преподавания теоретических основ математики:

- раскрыть студентам мировоззренческое значение математики, углубить их представления о роли и месте математики в изучении окружающего мира;
- дать студентам необходимые математические знания, на основе которых строится дошкольный и начальный курс математики;
- способствовать развитию мышления;
- развивать умения самостоятельной работы с учебными пособиями и другой математической литературой.

Курс математики призван обеспечить студентам необходимую подготовку для дальнейшей работы по углублению и расширению математических знаний, для использования в будущей практической работе.

В соответствии с поставленными целью и задачами курс состоит из шести разделов: «Некоторые вопросы теории целых неотрицательных чисел», «Расширение множества целых неотрицательных чисел», «Предикаты и операции над ними», «Применение теории предикатов», «Геометрические построения на плоскости». Содержание материала является теоретической основой школьного курса математики.

В разделах раскрыты позиционные и непозиционные системы счисления, делимость чисел, понятия выражения, уравнения и неравенства. Раздел «Расширение множества целых неотрицательных чисел» знакомит студентов с рациональными, действительными числами и операциями над ними. Материал этих разделов особенно важен с точки зрения профессиональной подготовки студентов.

Изучение раздела «Геометрические построения на плоскости» поможет не только систематизировать геометрические знания, полученные в школе, но углубить теорию и методику решения задач на построение с помощью циркуля и линейки.

Данное пособие может быть использовано как для работы под руководством преподавателя, так и для самостоятельного изучения курса математики.

Излагаемый материал по возможности связан с начальным курсом математики: для иллюстрации различных понятий, фактов или конструкций использовались примеры и игры, моделирующие понятия или конструкции, и соответствующий дидактический материал, что придало пособию профессиональную направленность.

1. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ЦЕЛЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

Методы математических рассуждений. В основе всякого математического исследования лежат дедуктивный и индуктивный методы. Дедуктивный метод рассуждений – это рассуждение от общего к частному, т.е. рассуждение, исходным моментом которого является общий результат, а заключительным моментом – частный результат. Индукция применяется при переходе от частных результатов к общим, т.е. является методом, противоположным дедуктивному.

Метод математической индукции можно сравнить с прогрессом. Мы начинаем с низшего, в результате логического мышления приходим к высшему. Человек всегда стремился к прогрессу, к умению развивать свою мысль логически, а значит, сама природа предначертала ему размышлять индуктивно.

Слово индукция по-русски означает наведение, а индуктивными называют выводы, на основе наблюдений, опытов, т.е. полученные путем заключения от частного к общему.

Например, мы каждый день наблюдаем, что Солнце восходит с востока. Поэтому можно быть уверенным, что и завтра оно появится на востоке, а не на западе. Этот вывод мы делаем, не прибегая ни к каким предположениям о причине движения Солнца по небу (более того, само это движение оказывается кажущимся, поскольку на самом деле движется земной шар). И, тем не менее, этот индуктивный вывод правильно описывает те наблюдения, которые мы проведем завтра.

Роль индуктивных выводов в экспериментальных науках очень велика. Они дают те положения, из которых потом путем дедукции делаются дальнейшие умозаключения. И хотя теоретическая механика основывается на трех законах движения Ньютона, сами эти законы явились результатом глубокого продумывания опытных данных, в частности законов Кеплера движения планет, выведенных им при обработке многолетних наблюдений датского астронома Тихо Браге. Наблюдение, индукция оказываются полезными и в дальнейшем для уточнения сделанных предположений.

В математике роль индукции в значительной степени состоит в том, что она лежит в основе выбираемой аксиоматики. После того как длительная практика показала, что прямой путь всегда короче кривого или ломанного, естественно было сформулировать аксиому: для любых трех точек А, В и С выполняется неравенство $|AB| + |BC| \geq |AC|$.

По своему первоначальному смыслу слово «индукция» применяется к рассуждениям, при помощи которых получают общие выводы, опираясь на ряд частных утверждений. Простейшим методом рассуждений такого рода является полная индукция. Вот пример подобного рассуждения.

Пусть требуется установить, что каждое натуральное чётное число n в пределах $4 < n < 20$ представимо в виде суммы двух простых чисел. Для этого возьмём все такие числа и выпишем соответствующие разложения:

$4 = 2 + 2$	$6 = 3 + 3$	$8 = 5 + 3$
$10 = 7 + 3$	$12 = 7 + 5$	$14 = 7 + 7$
$16 = 11 + 5$	$18 = 13 + 5$	$20 = 13 + 7$

Эти девять равенств показывают, что каждое из интересующих нас чисел действительно представляется в виде суммы двух простых слагаемых.

Таким образом, полная индукция заключается в том, что общее утверждение доказывается по отдельности в каждом из конечного числа возможных случаев.

Иногда общий результат удаётся предугадать после рассмотрения не всех, а достаточно большого числа частных случаев (так называемая неполная индукция).

Результат, полученный неполной индукцией, остается, однако, лишь гипотезой, пока он не доказан точным математическим рассуждением, охватывающим все частные случаи. Иными словами, неполная индукция в математике не считается законным методом строгого доказательства, но является мощным методом открытия новых истин.

Пусть, например, требуется найти сумму первых n последовательных нечётных чисел.

Рассмотрим частные случаи:

$1 = 1 = 1^2$
$1 + 3 = 4 = 2^2$
$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$
$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$

После рассмотрения этих нескольких частных случаев напрашивается следующий общий вывод: $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$, т.е. сумма n первых последовательных нечётных чисел равна n^2.

Разумеется, сделанное наблюдение ещё не может служить доказательством справедливости приведённой формулы.

Полная индукция имеет в математике лишь ограниченное применение. Многие интересные математические утверждения охватывают бесконечное число частных случаев, а провести проверку для бесконечного числа случаев мы не в состоянии. Неполная же индукция часто приводит к ошибочным результатам.

Метод математической индукции. Во многих случаях выход из такого рода затруднений заключается в обращении к особому методу рассуждений, называемому методом математической индукции. Он заключается в следующем.

Пусть нужно доказать справедливость некоторого утверждения для любого натурального числа n (например нужно доказать, что сумма первых n нечётных чисел равна n^2). Непосредственная проверка этого утверждения для каждого значения n невозможна, поскольку множество натуральных чисел бесконечно. Чтобы доказать это утверждение, проверяют сначала его справедливость для $n = 1$. Затем доказывают, что при любом натуральном значении k из справедливости рассматриваемого утверждения при $n=k$ вытекает его справедливость и при $n = k + 1$.

Тогда утверждение считается доказанным для всех n. В самом деле, утверждение справедливо при $n = 1$. Но тогда оно справедливо и для следующего числа $n=1+1=2$. Из справедливости утверждения для $n = 2$ вытекает его справедливость для $n = 2+1 = 3$. Отсюда следует справедливость утверждения для $n = 4$ и т.д. Ясно, что, в конце концов, мы дойдём до любого натурального числа n. Значит, утверждение верно для любого n.

Обобщая сказанное, сформулируем следующий общий принцип.

Принцип математической индукции. Если предложение А(n), зависящее от натурального числа n, истинно для $n = 1$ и из того, что оно истинно для $n = k$ (где k – любое натуральное число), следует, что оно истинно и для следующего числа $n = k+1$, то предположение $A(n)$ истинно для любого натурального числа n.

В ряде случаев бывает нужно доказать справедливость некоторого утверждения не для всех натуральных чисел, а лишь для $n > p$, где p – фиксированное натуральное число. В этом случае принцип математической индукции формулируется следующим образом.

Если предложение А(n) истинно при $n = p$ и если из предположения, что оно истинно при А(k) вытекает, что оно истинно при А(k+1) для любого $k > p$, то предложение А(n) истинно для любого $n > p$.

Доказательство по методу математической индукции проводиться следующим образом. Сначала доказываемое утверждение проверяется для $n = 1$, т.е. устанавливается истинность высказывания А(1). Эту часть доказательства называют базисом индукции. Затем следует часть доказательства, называемая индукционным шагом. В этой части доказывают справедливость утверждения для $n = k+1$ в предположении справедливости утверждения для $n = k$ (предположение индукции), т.е. доказывают, что истинность А(k+1) из предположения, что оно истинно при А(k).

Пример 1. Доказать, что при любом n справедливо утверждение: $1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$.

Решение.

1.Имеем $n = 1 = 1^2$. Следовательно, утверждение верно при $n = 1$, т.е. А(1) истинно.

2.Предположим, что А(k) истинно, то есть утверждение справедливо для $n = k$: $1+3+5+\ldots+(2k-1)=k^2$.

3.Докажем, что утверждение справедливо и для следующего натурального числа $n=k+1$, т.е. что верно равенство:

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2.$$

В самом деле, заменим сумму k слагаемых их значением, получим $(1+3+5+\ldots+(2k-1))+(2k+1)=k^2+2k+1=(k+1)^2$.

Итак, из того, что предложение истинно для $n = 1$ и из предположения, что оно истинно для $n = k$, следует, что оно истинно и для следующего числа $n=k+1$, на основании принципа математической индукции заключаем, что предположение истинно для любого натурального числа.

Пример 2. Доказать, что при любом n справедливо утверждение: $1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n=\dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$.

Решение.

1.При $n = 1$ получаем $1+x=\dfrac{x^2-1}{x-1}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{x-1}=x+1$. Следовательно, при $n = 1$ формула верна; А(1) истинно.

2.Предположим, что формула верна при $n = k$, т.е. верно равенство: $1+x+x^2+x^3+\ldots+x^k=\dfrac{x^{k+1}-1}{x-1}$.

3.Докажем, что тогда выполняется равенство

$$1+x+x^2+x^3+\ldots+x^k+x^{k+1}=\frac{x^{k+2}-1}{x-1}.$$

В самом деле

$$1+x+x^2+x^3+\ldots+x^k+x^{k+1}=(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^k)+x^{k+1}=$$

$$=\frac{x^{k+1}-1}{x-1}+x^{k+1}=\frac{x^{k+1}-1+x^{k+1}(x-1)}{x-1}=\frac{x^{k+1}-1+x^{k+2}-x^{k+1}}{x-1}=\frac{x^{k+2}-1}{x-1}$$

Итак, из того, что предложение истинно для $n = 1$ и из предположения, что оно истинно для $n = k$, следует, что оно истинно и для следующего числа $n=k+1$, на основании принципа математической индукции заключаем, что предположение истинно для любого натурального числа.

Пример 3. Доказать, что при любом n справедливо утверждение: $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Решение.

1.Пусть $n = 1$, тогда $X_1=1^2=\dfrac{1\cdot(1+1)\cdot(2+1)}{6}=1$.

Значит, при $n = 1$ утверждение верно.

2.Предположим, что утверждение верно при $n = k$, т.е верно равенство $X_k=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

3.Докажем, что данное утверждение истинно при $n=k+1$, т.е. верно равенство $X_{k+1}=\dfrac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.

$$X_{k+1}=1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=$$

$$=\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}=\frac{(k+1)(2k^2+k+6k+6)}{6}=$$

$$=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}=\frac{(k+1)(2(k+\frac{3}{2})(k+2)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Итак, из того, что предложение истинно для $n = 1$ и из предположения, что оно истинно для $n = k$, следует, что оно истинно и для следующего числа $n=k+1$, на основании принципа математической индукции заключаем, что предположение истинно для любого натурального числа.

Пример 4. Доказать, что для любого натурального n справедливо равенство: $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Решение.

1.Пусть $n = 1$. Тогда $X_1=1^3=\dfrac{1^2\cdot(1+1)^2}{4}=1$.

Мы видим, что при $n = 1$ утверждение верно.

2.Предположим, что равенство верно при $n = k$, имеем

$$X_k = \frac{k^2(k+1)^2}{4}.$$

3.Докажем истинность этого утверждения для $n=k+1$, т.е. верно равенство $X_{k+1} = \dfrac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$.

$$X_{k+1} = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 =$$
$$= \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} = \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.$$

Итак, из того, что предложение истинно для $n = 1$ и из предположения, что оно истинно для $n = k$, следует, что оно истинно и для следующего числа $n=k+1$, на основании принципа математической индукции заключаем, что предположение истинно для любого натурального числа.

Пример 5. Доказать, что для любого натурального n верно равенство $1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \ldots + (2n-1)^3 - (2n)^3 = -n^3(4n+3)$.

Решение.

1.Пусть $n = 1$. Тогда имеем $1^3 - 2^3 = -7$, $-1^3 \cdot (4 \cdot 1 + 3) = -7$, то есть $-7 = -7$. Истинное равенство.

2.Предположим, что равенство верно $n = k$, тогда

$$1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \ldots + (2k-1)^3 - (2k)^3 = -k^3(4k+3)$$

3.Докажем истинность этого равенства при $n=k+1$.

$$1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \ldots + (2k-1)^3 - (2k)^3 + (2k+1)^3 - (2k+2)^3 =$$
$$= -k^3(4k+3) + (2k+1)^3 - (2k+2)^3 = -(k+1)^3(4(k+1)+3).$$

Итак, из того, что предложение истинно для $n = 1$ и из предположения, что оно истинно для $n = k$, следует, что оно истинно и для следующего числа $n=k+1$, на основании принципа математической индукции заключаем, что предположение истинно для любого натурального числа.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Доказать методом математической индукции, что данные равенства верны при любом натуральном n

1. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

2. $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

3. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$

4. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}$

5. $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

6. $2\cdot 1^2+3\cdot 2^2+4\cdot 3^2+\ldots+n^2(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}$

7. $\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$

8. $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\ldots+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

9. $1\cdot 4+2\cdot 7+3\cdot 10+\ldots+n(3n+1)=n(n+1)^2$

10. $1+5+9+\ldots+(4n-3)=n(2n-1)$

11. $1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}=2^n-1$

12. $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\ldots+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

13. $2\cdot 2^0+3\cdot 2^1+4\cdot 2^2+\ldots+(n+1)\cdot 2^{n-1}=n\cdot 2^n$

14. $\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\frac{7}{144}+\ldots+\frac{2n+1}{n^2\cdot(n+1)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}$

СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

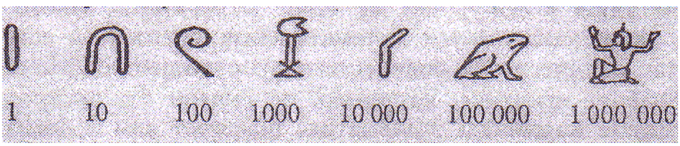
Позиционные и непозиционные системы счисления. Понятие числа возникло в глубокой древности. Тогда же возникла и необходимость в названии и записи чисел.

Определение 1. *Система счисления* – это язык для наименования, записи чисел и правила действий над числами.

Называть числа и вести счет люди научились еще до появления письменности. Способов счета было придумано немало: завязывали узлы на веревке, делали зарубки на палке, складывали в кучу камешки по числу предметов. Но ведь палку с собой не возьмешь, и камешки носить не хочется. На помощь пришли пальцы рук и ног. Кстати сказать, пальцы сыграли немалую роль в истории счета, особенно когда люди начали обмениваться друг с другом предметами своего труда. Так, например, первобытный человек, желая обменять сделанный им лук и стрелы на пять шкурок для одежды, клал на землю свою руку и показывал, что против каждого пальца его руки нужно положить шкурку. Одна пятерня означала 5, две – 10 шкурок. Когда рук не хватало, в ход шли и ноги. Две руки и одна нога – 15, две руки и две ноги – 20.

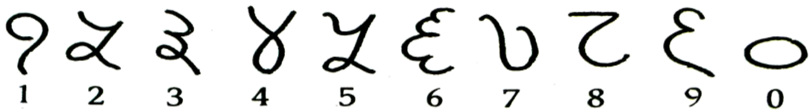
Способ «записи» чисел при помощи зарубок или узлов был не слишком удобным, так как приходилось делать много зарубок или узлов, это затрудняло и запись, и сравнение чисел друг с другом, и трудно было выполнять действия над ними. Поэтому возникли более экономичные записи чисел: счет стали вести группами, состоящими из одинакового числа элементов. Так, счет двадцатками использовали люди племени майя. Но и теперь есть еще племена, которые довольствуются при счете пальцами одной руки. У них система счета оказалась пятеричной. В странах, где люди ходили босиком, по пальцам легко было считать до 20, поэтому довольно большое распространение получила двадцатеричная система счисления. Самым серьезным соперником десятичной системы оказалась двенадцатеричная. Вместо десятков применяли при счете дюжины, то есть группы из 12 предметов. Во многих странах даже теперь некоторые товары, например, ножи, вилки, ложки продают дюжинами или полудюжинами. В столовый сервиз, как правило, входит по 6 или 12 тарелок, блюдец, чашек. В Древнем Вавилоне считали группами по 60 единиц. Например, число 185 представлялось как 3 раза по 60 и еще 5. Записывалось такое число с помощью всего двух знаков, один из которых обозначал, сколько раз взято по 60, а другой – сколько взято единиц. Древневавилонская система используется до сих пор при измерении времени и углов в минутах и секундах. Победа десятичной системы счисления над всеми другими объясняется тем, что у человека на каждой руке по 5 пальцев. Было бы их по шесть, считали бы мы не десятками, а дюжинами. А если бы у нас, как у лошадей, на руках и ногах были копыта, то арифметика была бы такой же, как у папуасов, – мы считали бы парами. Но странные повороты делает история! Именно двоичная система счисления счета оказалась самой полезной для современной техники, на основе двоичной арифметики работают современные ЭВМ.

Таким образом, людьми было создано много различных способов записи чисел. Наибольшее распространение получила десятичная система записи чисел. Эта система, принятая сейчас почти всюду, основана на группировании десятками и берет свое начало, как вы поняли, от счета на пальцах. В Древнем Египте числа первого десятка записывали соответствующим количеством палочек. А число 10 обозначалось скобкой в виде подковы. Чтобы написать 15, надо было поставить 5 палочек и одну подкову. Для сотни был придуман крючок, для тысячи – значок вроде цветка. Десять тысяч обозначали рисунком пальца, сто тысяч – лягушкой, миллион – фигуркой человека с поднятыми руками.



В Древней Руси числа обозначали буквами с особым знаком ~ («титло»). Например: ã, ẽ. Чтобы отделить такие буквы-числа от текста, спереди и сзади ставились точки. Этот способ обозначения цифр называется цифирью. Первые 9 букв алфавита обозначали единицы, следующие 9 букв – десятки, а последние 9 букв – сотни. Число десять тысяч называли словом «тьма».

Способ записи чисел с помощью цифр, который принят теперь во всем мире, был создан в Древней Индии. Древние индийцы изобрели для каждой цифры свой знак. Вот как они выглядели.



Однако Индия была оторвана от других стран – на пути к ней лежали тысячи километров расстояния и высокие горы. Арабы были первыми «чужими», которые заимствовали цифры у индийцев. Чуть позже арабы упростили эти значки, они стали выглядеть вот так:

Европейцы, в свою очередь, узнали цифры от арабов. Поэтому наши цифры стали называться арабскими. Хотя правильнее было бы называть их индийскими. Они употребляются в нашей стране, начиная примерно с XVII века.

Система счисления – это знаковая система, в которой числа записываются по определенным правилам с помощью символов некоторого алфавита, называемых цифрами. Таким образом, система счисления – сложное понятие. Оно включает в себя все законы, по которым числа записываются и читаются, а так же те, по которым производятся операции над ними.

Различают позиционные и непозиционные системы счисления.

Определение 2. В *позиционных системах* один и тот же знак может обозначать различные числа в зависимости от места (позиции), занимаемого этим знаком в записи числа.

Определение 3. *Непозиционные системы* характеризуются тем, что каждый знак (из совокупности знаков, принятых в данной системе для обозначения чисел) всегда обозначает одно и то же число, независимо от места (позиции), занимаемого этим знаком в записи числа. Хорошо известным примером непозиционной системы счисления является римская система. Римская система записи была связана со счетом на пальцах. Это видно из обозначения цифр латинскими буквами: I – обозначает один палец, V – раскрытую ладонь (т.е. 5 пальцев), X – две сложенные ладони (т.е. 10 пальцев).

Обозначения L для 50, C для 100 и M для 1000 – это первые буквы соответствующих латинских слов, например, centum – «сто», mille – «тысяча».

Получилось соответствие:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Эти знаки используются для узловых чисел – они обозначают всегда данные числа. Все остальные числа получаются при помощи двух арифметических операций – сложения и вычитания:

1) если большая цифра стоит перед меньшей, то они складываются (правило сложения).

Например:

II = I + I = 2, III = I + I + I = 3, VI = 6,
XVIII = X + V + I + I + I = 18;

2) если же меньшая цифра стоит перед большей, то меньшая вычитается из большей (правило вычитания).

Например:

IV = V – I = 4, IX = X – I = 9, XL = L – X = 40.

Запишем несколько чисел в римской нумерации.

193 – это сто (C) плюс девяносто, т.е. сто без десяти (XC), плюс три (III), следовательно, число 193 записывается как CXCIII.

Если число содержит немного тысяч, то для его записи в римской нумерации пользуются повторением знака M.

564 – это пятьсот (D) плюс пятьдесят (L) плюс десять (X) плюс четыре, т.е. пять без одного (IV). Следовательно, число

564 записывается DLXIV, а число 2708 – MMDCCVIII. Вообще же числа четырех-, пяти- и шестизначные записываются с помощью буквы m (от лат. слова mille), слева от которой записывали тысячи, а справа – сотни, десятки, единицы. Так, запись CXXXIIImDCCCXLII является записью числа 133842.

Как написано выше, позиционной системой счисления называется такая система, в которой значение каждой цифры в изображении числа зависит от ее положения в ряду других цифр, изображающих число.

Определение 4. Положение, занимаемой цифрой при письменном обозначении числа называется *разрядом.*

Наша, естественная система счисления – десятичная – является позиционной. Это значит, что в числе 2578, цифра «2» – обозначает две тысячи. Эта цифра стоит в позиции четвертого разряда. Цифра «5» – пять в разряде сотен, третий разряд. Цифра «7» – семь в разряде десятков, второй разряд, а «8» – восемь в разряде единиц, первый разряд. Распишем вышесказанное в виде математической формулы:

$$2578 = 2000 + 500 + 70 + 8 = 2\cdot1000 + 5\cdot100 + 7\cdot10 + 8 = 2\cdot10^3 + 5\cdot10^2 + 7\cdot10^1 + 8\cdot10^0.$$

Определение 5. В данной системе для записи любого числа используется десять знаков, называемых *цифрами*: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 – это математический алфавит.

При помощи этих 10 цифр можно записать любое число. Нуль впервые был придуман вавилонянами примерно две тысячи лет тому назад. Но они применяли его лишь для обозначения пропущенных разрядов в середине числа. Писать нули в конце записи числа они не догадались.

В Индии примерно полторы тысячи лет тому назад нуль был присоединен к девяти цифрам, и появилась возможность обозначать этими десятью цифрами любое число, как бы оно велико ни было. И самое главное, запись таких гигантских чисел стала довольно короткой. Приведем название некоторых больших чисел с указанием числа нулей после единицы.

Название класса	Число нулей	Запись числа	Степень
Тысяча	3	1 000	10^3
Миллион	6	1 000 000	10^6
Миллиард (биллион)	9	1 000 000 000	10^9
Триллион	12	1 000 000 000 000	10^{12}
Квадриллион	15	1 000 000 000 000 000	10^{15}
Квинтиллион	18	1000 000 000 000 000 000	10^{18}

Запись чисел в десятичной системе счисления. Как известно, в десятичной системе счисления для записи чисел используется 10 знаков (цифр): 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Из них образуются конечные последовательности, которые являются краткими записями чисел. Например, последовательность 3745 является краткой записью числа $3\cdot10^3+7\cdot10^2+4\cdot10+5$.

Определение 1. *Десятичной записью натурального числа x* называется его представление в виде:

$$x = a_{n\cdot} \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0\,,$$

где коэффициенты a_{n}, $a_{\text{n-1}}$,…, a_1, a_0 принимают значения 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и $a_{\text{n}} = 0$.

Сумму $a_{n\cdot} \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$ в краткой форме принято записывать так: $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$. Так как понятие числа и его записи нетождественны, то существование и единственность десятичной записи натурального числа надо доказывать.

Теорема 1. Любое натуральное число x. можно представить в виде: $x = a_{n\cdot} \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$ (1), где a_n, a_{n-1}, …, a_1, a_0 принимают значения 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, и такая запись единственна.

Существование. Среди последовательных чисел 1, 10, 10^2, 10^3,…, 10^{n},… найдем наибольшую степень, содержащуюся в x, т.е. такую, что $10^n \le x < 10^{n+1}$, что всегда можно сделать.

Разделим (с остатком) число x на 10^n. Если частное этих чисел обозначить через a_n, а остаток через x_n, то $x = a_n \cdot 10^n + x_n$, где $a_n < 10$ и $x_n < 10^n$.

Далее, разделив x_n на 10^{n-1}, получим: $x_n = a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + x_{n-1}$, откуда $x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + x_{n-1}$, где $a_{n-1} < 10$ и $x_{n-1} < 10^n$.

Продолжая деление, дойдем до равенства $x_2 = a_1 \cdot 10 + x_1$. Положив $x_1 = a_0$, будем иметь

$$x = a_{n\cdot} \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

т.е. число x. будет представлено в виде суммы степеней числа 10 с коэффициентами, меньшими 10, что и означает возможность записи числах в десятичной системе счисления.

Единственность. Число n в равенстве (1) однозначно определяется условием $10^n \leq x < 10^{n+1}$. После того как n определено, коэффициент a_n находят из условия: $a_n \cdot 10^n \leq x < (a_n+1)\ 10^n$. Далее, аналогичным образом определяются коэффициенты $a_{n-1}, \ldots, a_0$.

Десятичная запись числа позволяет просто решать вопрос о том, какое из них меньше.

Теорема 2. Пусть x и y – натуральные числа, запись которых дана в десятичной системе счисления:

$$x = a_{n\cdot} \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$$
$$y = b_{m\cdot} \cdot 10^m + b_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \ldots + b_1 \cdot 10 + b_0$$

Тогда число x меньше числа y, если выполнено одно из условий: а) $n < m$;

б) $n = m$, но $a_n < b_n$;

в) $n = m$, $a_n = b_n$, …, $a_k = b_k$, но $a_{k-1} < b_{k-1}$.

Доказательство. В случае а) имеем: так как $n < m$, то $10^{n+1} < 10^m$, а поскольку $x < 10^{n+1}$ и $10^m \leq y$, то $x < 10^{n+1} \leq 10^m \leq y$, т.е. $x < y$.

В случае б) имеем: если $n = m$, но $a_n < b_n$, то $a_n+1 \leq b_n$ и потому $(a_n+1)\cdot 10^n \leq b_n \cdot 10^n$. А так как $x < (a_n+1)\cdot 10^n$ и $b_n \cdot 10^n \leq y$, то $x < (a_n+1)\cdot 10^n < b_n \cdot 10^{\,n} \leq y$, то $x < y$.

Аналогично доказывается теорема и в случае в).

Например, если $x = 3456$, а $y = 3467$, то $x < y$, так как числа в разрядах тысяч и сотен в записи одинаковое, но число в разряде десятков в числе x меньше, чем число в разряде десятков в числе y.

Определение 1. Если натуральное число x представлено в виде $x = a_{n} \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$, то числа 1, 10, 10^2, …, 10^n называют *разрядными единицами* соответственно первого, второго, …, $n+1$ разряда, причем 10 единиц одного разряда составляют одну единицу следующего высшего разряда, т.е. отношение соседних разрядов равно 10 – основанию системы счисления.

Определение 2. Три первых разряда в записи числа соединяют в одну группу и называют *первым классом,* или *классом единиц.* В первый класс входят единицы, десятки, сотни.

Определение 3. Четвертый, пятый и шестой разряды в записи числа образуют *второй класс – класс тысяч.* В него входят единицы тысяч, десятки тысяч и сотни тысяч.

Определение 4. Затем следует *третий класс – класс миллионов,* состоящий тоже из трех разрядов: седьмого, восьмого и девятого, т.е. из единиц миллионов, десятков миллионов и сотен миллионов.

Последующие три разряда также образуют новый класс и т.д. Выделение классов единиц, тысяч, миллионов и т.д. создает удобства для записи и прочтения чисел.

В десятичной системе всем числам можно дать название (имя). Это достигается следующим образом: имеются названия первых десяти чисел, затем из них в соответствии с определением десятичной записи и путем прибавления еще немногих слов образуются названия последующих чисел. Так, числа второго десятка (они представляются в виде $1 \cdot 10 + a_0$) образуются из соединения первых десяти названий и несколько измененного слова десять («дцать»):

одиннадцать – один на десять,

двенадцать – два на десять и т.д.

Может быть, естественнее было бы говорить «два» и «десять», но наши предки предпочли говорить «два на десять», что и сохранилось в речи.

Слово «двадцать» обозначает два десятка.

Числа третьего десятка (это числа вида $2 \cdot 10 + a_0$) получают путем прибавления к слову «двадцать» названий чисел первого десятка: двадцать один, двадцать два и т.д.

Продолжая далее счет, получим название чисел четвертого, пятого, шестого, седьмого, восьмого, девятого и десятого десятков. Названия этих чисел образуются так же, как и в пределах третьего десятка, только в трех случаях появляются новые слова: сорок (для обозначения четырех десятков), девяносто (для обозначения девяти десятков) и сто (для обозначения десяти десятков). Названия чисел второй сотни составляются из слова «сто» и названий чисел первого и последующих десятков. Таким путем образуются наименования: сто один, сто два,…, сто двадцать и т.д. Отсчитав новую сотню, будем иметь две сотни, которые для краткости называют «двести». Для получения чисел, больших двухсот, снова воспользуемся названиями чисел первого и последующих десятков, присоединяя их к слову «двести». Затем получим особые названия: триста, четыреста, пятьсот и т.д. до тех пор, пока не отсчитаем десять сотен, которые носят название *тысяча*.

Счет за пределами тысячи ведется так: прибавляя к тысяче по единице (тысяча один, тысяча два и т.д.), получим две тысячи, три тысячи и т.д. Когда же отсчитаем тысячу тысяч, то это число получит особое наименование – *миллион*. Далее считаем миллионами до тех пор, пока не дойдем до тысячи миллионов. Полученное новое число – тысяча миллионов – носит особое название *миллиард*. Миллион миллионов называется *биллионом*. В вычислениях миллион принято записывать в виде 10^6, миллиард – 10^9, биллион – 10^{12}. По аналогии можно получить записи еще больших чисел: *триллион* – 10^{15}, *квадриллион* – 10^{18} и т.д.

Таким образом, для того чтобы назвать все натуральные числа в пределах миллиарда, потребовалось только 16 различных слов: один, два, три, четыре, пять, шесть, семь, восемь, девять, десять, сорок, девяносто, сто, тысяча, миллион, миллиард. Остальные названия чисел (в пределах миллиарда) образуются из основных.

Вопросы наименования и записи чисел рассматриваются в начальном курсе математики в разделе «Нумерация». При этом десятичной записью натурального числа считают его представление в виде суммы разрядных слагаемых. Например, 3000 + 700 + 40 + 5 есть сумма разрядных слагаемых числа 3745. Представление числа в виде таких сумм удобно для его наименования: три тысячи семьсот сорок пять.

Запись чисел в р-ичной системе счисления. Основанием позиционной системы счисления может быть не только число 10, но и вообще любое натуральное число $p \geq 2$.

Определение 1. Система счисления с основанием p называется p-ичной.

Например, если $p = 2$, то – двоичной, если $p = 8$ – восьмеричной, если $p = 10$ – десятичной.

Для записи чисел в системе с основанием p необходимо p символов. Принято использовать знаки десятичной системы счисления: 0, 1, 2, ..., $p - 1$. Например, числа в троичной системе счисления записывают при помощи символов 0, 1, 2; в пятеричной – при помощи символов 0, 1, 2, 3, 4.

В системах счисления, в которых $p > 10$, для получения остальных цифр, кроме традиционных десяти, используются первые буквы латинского алфавита: A, B, C и др. Например, в 16-ричной системе счисления для получения 16 цифр используют следующие буквы латинского алфавита: A, B, C, D, E, F. Каждой цифре сопоставляется ее числовое значение. Для традиционных десяти цифр числовое значение цифры и сама цифра обозначаются одинаковыми словами: ноль, один, два и т.д. Цифры A, B, C, D, E, F имеют числовые значения, выраженные в 10-ой системе счисления, соответственно A = 10, B = 11, …, F = 15.

Определение 2. *Записью натурального числа x* в системе счисления с основанием p называется его представление в виде: $x = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0$, где коэффициенты a_n, a_{n-1}, …, a_1, a_0 принимают значения 0, 1, 2, ..., $p - 1$ и $a_n \neq 0$.

Теорема. Пусть $p \geq 2$ – заданное натуральное число. Тогда любое натуральное число x представимо, и притом единственным образом в виде $x = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0$.

Существование. Дана последовательность чисел 1, p^1, p^2, p^3, ..., p^n, ... Найдем наибольшую степень p, содержащуюся в x, т.е. такую, что $p^n < x < p^{n+1}$, что всегда можно сделать. Разделим (с остатком) число x на p^n. Если значение частного этих чисел обозначить через a_n, а остаток через x_n, тогда $x = a_n \cdot p^n + x_n$, где $a_n < p$ и $x_n < p^n$. Далее, разделим x_n на p^{n-1}, получим $x_n = a_{n-1}p^{n-1} + x_{n-1}$, откуда $x = a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + x_{n-1}$, где $a_{n-1} < p$ и $x_{n-1} < p^{n-1}$. Продолжая деление, дойдем до равенства $x_2 = a_1 \cdot p + x_1$. Положим $x_1 = a_0$, имеем $x = a_n \cdot p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0$, т.е. число x будет представлено в виде суммы степеней числа p с коэффициентами, меньшими p, что и означает возможность записи числа x в p-ичной системе счисления.

Единственность. Число n в записи числа x однозначно определяется условием $p^n \le x < p^{n+1}$. Если n определено, то коэффициент a_n находится из условия: $a_n \cdot p^n \le x < (a_n + 1)\, p^n$. Аналогичным образом определяются коэффициенты a_{n-1}, ..., a_0.

Вместо представления в виде суммы

$$x = a_n \cdot p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0$$

число x записывают кратко: $x = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}_{\,p}$.

Например, в троичной системе счисления, где $p = 3$, число $x = 2 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3 + 2$ можно записать в виде 2012_3, читается: «Два, ноль, один, два в троичной системе счисления».

Наиболее экономной в плане использования различных знаков для записи чисел является двоичная система счисления – в ней для этих целей нужно всего два знака 0 и 1. В этой системе краткая запись числа представляет собой конечную последовательность из нулей и единиц.

Например: $101110_2 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 0$.

С помощью этих двух цифр, используемых при записи любого числа в двоичной системе счисления, можно охарактеризовать два устойчивых состояния радиоэлектронных элементов. Например, электронная лампа может пропускать ток или не пропускать. Это свойство радиоэлектронных элементов и является причиной того, что именно двоичная система счисления оказалась наиболее удобной для вычислительных машин. Другой причиной использования этой системы является простота выполнения на машине арифметических действий над числами, записанными в двоичной системе.

Представим в таблице соответствие чисел в различных системах счисления.

Десятичная	Шестнадцатеричная	Восьмеричная	Двоичная
0	0	0	0
1	1	1	1
2	2	2	10
3	3	3	11
4	4	4	100
5	5	5	101
6	6	6	110
7	7	7	111
8	8	10	1000
9	9	11	1001
10	A	12	1010
11	B	13	1011
12	C	14	1100
13	D	15	1101
14	E	16	1110
15	F	17	1111
16	10	20	10000

С помощью данного соответствия можно переводить числа из одной системы счисления в другую. Например, запишем число 6275_8 в двоичной системе счисления. Для этого найдем соответствие по каждой цифре: 6 – 110, 2 – 010, 7 – 111, 5 – 101. Таким образом, $6275_8 = 110\ 010\ 111\ 101_2$.

Сравнение чисел, записанных в системе счисления с основанием p ($p \neq 10$), выполняется так же, как и в десятичной системе. Так, $1201_3 < 1202_3$, поскольку при одинаковом количестве разрядов и совпадении трех цифр старших разрядов цифра младшего разряда первого числа меньше цифры такого же разряда второго числа.

Перевод чисел, представленных в p-ичной системе счисления, в десятичную систему счисления. Пусть число x записано в системе счисления с основанием p: $x = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}_{\,p}$. Нам необходимо записать его в десятичной системе счисления. Для этого представим число x в виде суммы разрядных слагаемых в системе p:

$$x = a_{n\cdot} p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0 .$$

В записи числа x числа a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 и p представлены в десятичной системе счисления, поэтому выполнив действия над этими числами по правилам, принятым в десятичной системе, получим десятичную запись числа x.

Например, переведем число 3241_5 из пятеричной системы счисления в десятичную. Представим его в виде суммы разрядных слагаемых: $3241_5 = 3\cdot5^3 + 2\cdot5^2 + 4\cdot5 + 1 = 375 + 50 + 20 + 1 = 446$. Таким образом, $3241_5 = 446$.

Перевод чисел, представленных в десятичной системе счисления, в p-ичную систему счисления. Пусть число x записано в десятичной системе счисления. Представить его в системе с основанием p – это значит найти такие значения a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0, что $x = a_{n\cdot} p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0$, причем $1 \le a_n < p$, $0 \le a_{n-1} < p, \ldots, 0 \le a_0 < p$.

Обратим внимание на следующую закономерность: число $x = a_{n\cdot} p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0$ можно записать в виде $x = p(a_{n\cdot} p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} + \ldots + a_1) + a_0$, так как $0 \le a_0 < p$, то данное представление числа x можно рассматривать как запись деления с остатком числа x на p, где a_0 – остаток, $a_{n\cdot} p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} + \ldots + a_1$ – неполное частное. Точно также можно найти, что a_1 – это остаток, который получается при делении полученного частного на p, и т.д. Эта закономерность и лежит в основе процесса перехода от десятичной записи числа к записи в системе с основанием p.

Таким образом, чтобы перевести число, записанное в десятичной системе счисления, в p-ичную систему счисления, необходимо:

1) разделить с остатком число x на p по правилам деления в десятичной системе;

2) остаток, полученный при делении, даст последнюю цифру a_0 в p-ичной записи числа x;

3) полученное неполное частное снова делим на p, новый остаток даст предпоследнюю цифру p-ичной записи числа x;

4) продолжая процесс деления, найдем все цифры p-ичной записи числа x.

Например, представим число 1453 в шестеричной системе счисления.

Разделим 1453 на 6: $1453 = 242 \cdot 6 + 1$.

Делим 242 на 6: $242 = 40 \cdot 6 + 2$

Делим 40 на 6: $40 = 6 \cdot 6 + 4$

Делим 6 на 6: $6 = 1 \cdot 6 + 0$

Делим 1 на 6: $1 = 0 \cdot 6 + 1$

Тогда $1453 = 1 \cdot 6^4 + 0 \cdot 6^3 + 4 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6 + 1$

$1453 = 10421_6$.

Описанный процесс можно представить иначе:

```
_1453 | 6
  12   _242 | 6
  _25    24  _40 | 6
    24   _ 2   36  _6 | 6
    _13     0    4   6  _1 | 6
      12    2        0   0   6
       1                 1
```

Записывая результат такого деления, надо помнить, что цифра старшего разряда – это последнее частное в цепочке последовательных делений.

Арифметические действия над числами в десятичной системе счисления. Алгоритм сложения. Сложение однозначных чисел можно выполнить, основываясь на определении этого действия, но чтобы всякий раз не обращаться к определению, все суммы, которые получаются при сложении однозначных чисел, записывают в особую таблицу, называемую таблицей сложения однозначных чисел, и запоминают.

Естественно, смысл сложения сохраняется и для многозначных чисел, но практическое выполнение сложения происходит по особым правилам. Сумму многозначных чисел обычно находят, выполняя сложение столбиком. Например,

$$\begin{array}{r} 341 \\ +\underline{7238} \\ 7579 \end{array}$$

Выясним, каким образом возникает этот алгоритм, какие теоретические положения лежат в его основе.

Представим слагаемые 341 и 7238 в виде суммы степеней десяти с коэффициентами:

$$341+7238=(3\cdot10^2+4\cdot10+1)+(7\cdot10^3+2\cdot10^2+3\cdot10+8).$$

Раскроем скобки в полученном выражении, поменяем местами и сгруппируем слагаемые так, чтобы единицы оказались рядом с единицами, десятки с десятками и т.д. Все эти преобразования можно выполнить на основании соответствующих свойств сложения. Свойство ассоциативности разрешает записать выражение без скобок:

$$3\cdot10^2+4\cdot10+1+7\cdot10^3+2\cdot10^2+3\cdot10+8.$$

На основании свойства коммутативности поменяем местами слагаемые: $7\cdot10^3+3\cdot10^2+2\cdot10^2+4\cdot10+3\cdot10+1+8$.

Согласно свойству ассоциативности произведем группировку: $7\cdot10^3 + (3\cdot10^2 + 2\cdot10^2) + (4\cdot10 + 3\cdot10) + (1 + 8)$. Вынесем за скобки в первой выделенной группе число 10^2, а во второй – 10. Это можно сделать в соответствии со свойством дистрибутивности умножения относительно сложения:

$$7\cdot10^3 + (3 + 2)\cdot10^2 + (4 + 3)\cdot10 + (1 + 8).$$

Итак, сложение данных чисел 341 и 7238 свелось к сложению однозначных чисел, изображенных цифрами соответствующих разрядов. Эти суммы находим по таблице сложения: $7\cdot10^3 + 5\cdot10^2 + 7\cdot10 + 9$. Полученное выражение есть десятичная запись числа 7579.

Видим, что в основе алгоритма сложения многозначных чисел лежат следующие теоретические факты:

- способ записи чисел в десятичной системе счисления;
- свойства коммутативности и ассоциативности сложения;
- дистрибутивность умножения относительно сложения;
- таблица сложения однозначных чисел.

Нетрудно убедиться в том, что в случае сложения чисел «с переходом через десяток» теоретические основы алгоритма сложения будут теми же. Рассмотрим, например, сумму 748 + 436.

Представим слагаемые в виде суммы степеней десяти с соответствующими коэффициентами: $(7\cdot10^2 + 4\cdot10 + 8) + (4\cdot10^2 + 3\cdot10 + 6)$. Воспользуемся свойствами сложения и дистрибутивностью умножения относительно сложения и преобразуем полученное выражение к такому виду: $(7 + 4)\cdot10^2 + (4 + 3)\cdot10 + (8 + 6)$. Видим, что в этом случае сложение данных чисел также свелось к сложению однозначных чисел, но суммы 7 + 4 и 8 + 6 превышают 10 и поэтому последнее выражение не является десятичной записью числа. Необходимо сделать так, чтобы коэффициенты перед степенями 10 оказались меньше 10. Для этого выполним ряд преобразований. Сначала сумму 8 + 6 представим в виде $1\cdot10 + 4$: $(7 + 4)\cdot10^2 + (4 + 3)\cdot10 + (1\cdot10 + 4)$.

Затем воспользуемся свойствами сложения и умножения и приведем полученное выражение к виду:

$$(7 + 4)\cdot10^2 + (4 + 3 + 1)\cdot10 + 4.$$

Суть последнего преобразования такова: десяток, который получился при сложении единиц, прибавим к десяткам данных чисел. И наконец, записав сумму 7 + 4 в виде $1\cdot10 + 1$, получаем: $(1\cdot10 + 1)\cdot10^2 + 8\cdot10 + 4$. Последнее выражение есть десятичная запись числа 1184. Следовательно, 748 + 436 = 1184.

Выведем алгоритм сложения многозначных чисел в общем виде. Пусть даны числа: $x = a_{n\cdot}\cdot10^n + a_{n-1}\cdot10^{n-1} + \ldots + a_1\cdot10 + a_0$ и $y = b_{n\cdot}\cdot10^n + b_{n-1}\cdot10^{n-1} + \ldots + b_1\cdot10 + b_0$, т.е. рассмотрим случай, когда количество цифр в записи чисел x и y одинаково,

$$x + y = (a_{n\cdot} \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0) +$$
$$+ (b_{n\cdot} \cdot 10^n + b_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + b_1 \cdot 10 + b) =$$
$$= (a_{n\cdot} + b_n) \cdot 10^n + (a_{n-1} + b_{n-1}) \cdot 10^{n-1} + \ldots + (a_1 + b_1) \cdot 10 + (a_0 + b_0)$$

– преобразования выполнены на основе свойств ассоциативности и коммутативности сложения, а также дистрибутивности умножения относительно сложения.

Сумму $(a_{n\cdot} + b_n) \cdot 10^n + (a_{n-1} + b_{n-1}) \cdot 10^{n-1} + \ldots + (a_0 + b_0)$, вообще говоря, нельзя рассматривать как десятичную запись числа $x.+ y$, так как коэффициенты перед степенями 10 могут быть больше 9. Лишь в случае, когда все суммы $a_k + b_k$ не превосходят 9, операцию сложения можно считать законченной. В противном случае выбираем наименьшее k, для которого $a_k + b_k \geq 10$. Если $a_k + b_k \geq 10$, то из того, что $0 \leq a_k \leq 9$ и $0 \leq b_k \leq 9$, следует неравенство $0 \leq a_k + b_k \leq 18$ и поэтому $a_k + b_k$ можно представить в виде $a_k + b_k = 10 + c_k$, где $0 \leq c_k \leq 9$. Но тогда $(a_k + b_k) \cdot 10^k = (10 + c_k) - 10^k = 10^{k+1} + c_k \cdot 10^k$. В силу свойств сложения и умножения в $(a_{n\cdot} + b_n) \cdot 10^n + (a_{n-1} + b_{n-1}) \cdot 10^{n-1} + \ldots + (a_0 + b_0)$ слагаемые $(a_{k+1} + b_{k+1}) \cdot 10^{k+1} + (a_k + b_k) \cdot 10^k$ могут быть заменены на $(a_{k+1} + b_{k+1} + 1) \cdot 10^{k+1} + c_k \cdot 10^k$.После этого рассматриваем коэффициенты $(a_n + b_n)$, $(a_{n-1} + b_{n-1})$, …, $(a_{k+2} + b_{k+2})$, $(a_{k+1} + b_{k+1} + 1)$, выбираем наименьшее s, при котором коэффициент больше 9, и повторяем описанную процедуру. Через n шагов придем к выражению вида: $x + y = (c_n + 10) \cdot 10^n + \ldots + c_0$, где $c_n = 0$, или $x + y = 10^{n+1} + c_n \cdot 10^n + \ldots + c_0$, и где для всех n выполняется равенство $0 \leq c_n < 10$. Тем самым получена десятичная запись числа $x + y$.

В случае, когда десятичные записи слагаемых имеют разное количество цифр, надо приписать к числу, имеющему меньшее количество цифр, несколько нулей впереди, уравняв количество цифр в обоих слагаемых. После этого применяется описанный выше процесс сложения. Он позволяет сформулировать в общем виде алгоритм сложения натуральных чисел, записанных в десятичной системе счисления.

1.Записывают второе слагаемое под первым так, чтобы соответствующие разряды находились друг под другом.

2.Складывают единицы в первом разряде. Если сумма меньше десяти записывают ее в разряд единиц ответа и переходят к следующему разряду десятков.

3.Если сумма единиц больше или равна десяти, то представляют ее в виде $a_0+b_0=1\cdot 10+c_0$, где c_0 – однозначное число; записывают c_0 в разряд единиц ответа и прибавляют 1 к десяткам первого слагаемого, после чего переходят к разряду десятков.

4.Повторяют те же действия с разрядом десятков, потом с разрядом сотен и т.д. Процесс заканчивается, когда оказываются сложенными единицы старших разрядов. При этом если их сумма больше или равна десяти, то приписываем впереди обоих слагаемых нули, увеличиваем нуль перед первым слагаемым на 1 и выполняем сложение 1+0=1.

Заметим, что в этом алгоритме (как и в некоторых других) для краткости употребляется термин «цифра» вместо «однозначное число, изображаемое цифрой».

Алгоритм вычитания. Вычитание однозначного числа b из однозначного или двузначного числа a, не превышающего 18, сводится к поиску такого числа c, что $b + c = a$, и происходит с учетом таблицы сложения однозначных чисел.

Если же числа a и b многозначные и $b < a$, то смысл действия вычитания остается тем же, что и для вычитания в пределах 20, но техника нахождения разности становится иной: разность многозначных чисел чаще всего находят, производя вычисления столбиком, по определенному алгоритму. Выясним, каким образом возникает этот алгоритм, какие теоретические факты лежат в его основе.

Рассмотрим разность чисел 485 и 231. Воспользуемся правилом записи чисел в десятичной системе счисления и представим данную разность в таком виде: $485 - 231 = (4\cdot 10^2 + 8\cdot 10 + 5) - (2\cdot 10^2 + 3\cdot 10 + 1)$. Чтобы вычесть из числа $4\cdot 10^2 + 8\cdot 10 + 5$ сумму $2\cdot 10^2 + 3\cdot 10 + 1$, достаточно вычесть из него каждое слагаемое этой суммы одно за другим, и тогда:

$$(4\cdot 10^2 + 8\cdot 10 + 5) - (2\cdot 10^2 + 3\cdot 10 + 1) =$$
$$= (4\cdot 10^2 + 8\cdot 10 + 5) - 2\cdot 10^2 - 3\cdot 10 - 1.$$

Чтобы вычесть число из суммы, достаточно вычесть его из какого-либо одного слагаемого (большего или равного этому числу). Поэтому число $2\cdot10^2$ вычтем из слагаемого $4\cdot10^2$, число $3\cdot10$ – из слагаемого $8\cdot10$, а число 1 – из слагаемого 5, тогда:

$$(4\cdot10^2 + 8\cdot10 + 5) - 2\cdot10^2 - 3\cdot10 - 1 =$$
$$= (4\cdot10^2 - 2\cdot10^2) + (8\cdot10 - 3\cdot10) + (5 - 1).$$

Воспользуемся дистрибутивностью умножения относительно вычитания и вынесем за скобки 10^2 и 10. Тогда выражение будет иметь вид: $(4 - 2)\cdot10^2 + (8 - 3)\cdot10 + (5 - 1)$. Видим, что вычитание трехзначного числа 231 из трехзначного числа 485 свелось к вычитанию однозначных чисел, изображенных цифрами соответствующих разрядов в записи заданных трехзначных чисел. Разности 4 – 2, 8 – 3 и 5 – 1 находим по таблице сложения и получаем выражение: $2\cdot10^2 + 5\cdot10 + 4$, которое является записью числа 254 в десятичной системе счисления. Таким образом, 485 – 231 = 254.

Выражение $(4 - 2)\cdot10^2 + (8 - 3)\cdot10 + (5 - 1)$ задает правило вычитания, которое обычно выполняется столбиком:

$$\begin{array}{r} _{-}\,485 \\ \underline{231} \\ 254 \end{array}$$

Видим, что вычитание многозначного числа из многозначного основывается на:

- способе записи числа в десятичной системе счисления;
- правилах вычитания числа из суммы и суммы из числа;
- свойстве дистрибутивности умножения относительно вычитания;
- таблице сложения однозначных чисел.

Нетрудно убедиться в том, что если в каком-нибудь разряде уменьшаемого стоит однозначное число, меньше числа в том же разряде вычитаемого, то в основе вычитания лежат те же теоретические факты и таблица сложения однозначных чисел. Найдем, например, разность чисел 760 - 326. Воспользуемся правилом записи чисел в десятичной системе счисления и представим эту разность в таком виде:

$$760 - 326 = (7\cdot10^2 + 6\cdot10 + 0) - (3\cdot10^2 + 2\cdot10 + 6).$$

Поскольку из числа 0 нельзя вычесть 6, то выполнить вычитание аналогичное тому, как было сделано в первом случае, невозможно. Поэтому возьмем из числа 760 один десяток и представим его в виде 10 единиц – десятичная система счисления позволяет это сделать – тогда будем иметь выражение: $(7\cdot10^2 + 5\cdot10 + 10) - (3\cdot10^2 + 2\cdot10 + 6)$. Если теперь воспользоваться правилами вычитания суммы из числа и числа из суммы, а также дистрибутивностью умножения относительно вычитания, то получим выражение $(7 - 3)\cdot10^2 + (5 - 2)\cdot10 + (10 - 6)$ или $4\cdot10^2 + 3\cdot10 + 4$. Последняя сумма есть запись числа 434 в десятичной системе счисления. Значит,760 – 326 = 434.

Рассмотрим процесс вычитания многозначного числа из многозначного в общем виде.

Пусть даны два числа

$$x = a_{n\cdot}\cdot10^n + a_{n-1}\cdot10^{n-1} + \ldots + a_1\cdot10 + a_0 \text{ и}$$
$$y = b_{n\cdot}\cdot10^n + b_{n-1}\cdot10^{n-1} + \ldots + b_1\cdot10 + b_0 .$$

Известно также, что $y < x$. Используя правила вычитания числа из суммы и суммы из числа, дистрибутивность умножения относительно вычитания, можно записать, что

$$x - y = (a_{m\cdot} - b_m)\cdot10^m + (a_{m-1} - b_{m-1})\cdot10^{m-1} + \ldots + (a_0 - b_0) \text{ (1).}$$

Эта формула задает алгоритм вычитания, но при условии, что для всех k выполняется условие $a_k \geq b_k$. Если же это условие не выполняется, то берем наименьшее k, для которого $a_k < b_k$. Пусть m – наименьший индекс, такой, что $m > k$ и $a_m = 0$, а $a_{m-1} = \ldots = a_{k+1} = 0$. Имеет место равенство $a_m\cdot10^m = (a_{m-1})\cdot10^m + 9\cdot10^{m-1} + \ldots + 9\cdot10^{k+1} + 10\cdot10^k$ (например, если $m = 4$, $k = 1$, $a_m = 6$, то $6\cdot10^4 = 5\cdot10^4 + 9\cdot10^3 + 9\cdot10^2 + 10\cdot10$). Поэтому в равенстве (1) выражение $(a_m - b_m)\cdot10^m + \ldots + (a_k - b_k)\cdot10^k$ можно заменить на $(a_m - b_{m-1})\cdot10^m + (9 - b_{m-1})\cdot10^{m-1} + \ldots + (9 - b_{k+1})\cdot10^{k+1} + (a_k + 10 - b_k)$. Из того, что $a_k < b_k < 10$, вытекает неравенство $0 < 10 + a_k - b_k < 10$, а из того, что $0 \leq b_s < 9$, вытекает неравенство $0 \leq 9 - b_s < 10$, где $k + 1 < s < m - 1$. Поэтому в записи $x - y = (a_n - b_n)\cdot10^n + \ldots + (a_m - b_m - 1)\cdot10^m + (9 - b_{m-1})\cdot10^{m-1} + \ldots + (9 - b_{k+1})\cdot10^{k+1} + (a_k + 10 -$

$b_k)\cdot 10^k$ + …+ $(a_0 - b_0)$ все коэффициенты с индексом, меньшим m, неотрицательны и не превосходят 9. Применяя далее те же преобразования к коэффициентам $a_n - b_n$, …, $a_m - b_{m-1}$, через n шагов придем к записи разности $x - y$ в виде $x - y = c_n\cdot 10^n +$ $+ c_{n-1}\cdot 10^{n-1} +\ldots+ c_0$, где для всех k выполняется неравенство $0 < c_k < 10$. Если при этом окажется, что $c_n = 0$, то надо отбросить первые слагаемые, вплоть до первого коэффициента, отличного от нуля.

Описанный процесс позволяет сформулировать в общем виде алгоритм вычитания чисел в десятичной системе счисления.

1.Записываем вычитаемое под уменьшаемым так, чтобы соответствующие разряды находились друг под другом.

2.Если цифра в разряде единиц вычитаемого не превосходит соответствующей цифры уменьшаемого, вычитаем ее из цифры уменьшаемого, записываем разность в разряд единиц искомого числа, после чего переходим к следующему разряду.

3.Если же цифра вычитаемого больше единиц уменьшаемого, т.е. $b_0>a_0$, а цифра десятков уменьшаемого отлична от нуля, то уменьшаем цифру десятков уменьшаемого на 1, одновременно увеличив цифру единиц уменьшаемого на 10, после чего вычитаем из числа $10+a_0$ число b_0 и записываем разность в разряде единиц искомого числа, далее переходим к следующему разряду.

4.Если цифра единиц вычитаемого больше цифры единиц уменьшаемого, стоящие в разряде десятков, сотен и т.д. уменьшаемого, равны нулю, то берем первую отличную от нуля цифру в уменьшаемом (после разряда единиц), уменьшаем ее на 1. Все цифры в младших разрядах до разряда десятков включительно увеличиваем на 9, а цифру в разряде единиц на 10: вычитаем b_0 из $10+ a_0$, записываем разность в разряде единиц искомого числа и переходим к следующему разряду.

5.В следующем разряде повторяем описанный процесс.

6.Вычитание заканчивается, когда производится вычитание из старшего разряда уменьшаемого.

Алгоритм умножения. Умножение однозначных чисел можно выполнить, основываясь на определении этого действия. Но чтобы всякий раз не обращаться к определению, все произведения однозначных чисел записывают в особую таблицу, называемую таблицей умножения однозначных чисел, и запоминают.

Естественно, что смысл умножения сохраняется и для многозначных чисел, но меняется техника вычислений. Произведение многозначных чисел, как правило, находят, выполняя умножение столбиком, по определенному алгоритму. Выясним, каким образом возникает этот алгоритм, какие теоретические факты лежат в его основе.

Умножим, например, столбиком 428 на 263. Видим, что для получения ответа нам пришлось умножить 428 на 3, 6, и 2, т.е. умножить многозначное число на однозначное; но, умножив на 6, результат записали по-особому, поместив единицы числа2568 под десятками числа1284, так как умножали на 60 и получили число 25680, но нуль в конце записи опустили. Слагаемое 856 – это результат умножения на 2 сотни, т.е. число 85600. Кроме того, нам пришлось найти сумму многозначных чисел.

$$\begin{array}{r} 428\\ {}^{\times}\underline{263}\\ 1284\\ +2568\\ \underline{856}\\ 112564 \end{array}$$

Итак, чтобы выполнять умножение многозначного числа на многозначное, необходимо уметь:

- умножать многозначное число на однозначное и на степень десяти;
- складывать многозначные числа.

Сначала рассмотрим умножение многозначного числа на однозначное. Умножим, например, 428 на 3. Согласно правилу записи чисел в десятичной системе счисления 428 можно представить в виде $4\cdot 10^2 + 2\cdot 10 + 8$ и тогда $428 \cdot 3 = (4\cdot 10^2 + 2\cdot 10 + 8)\cdot 3$. На основании дистрибутивности умножения относительно сложения раскроем скобки: $(4\cdot 10^2)\cdot 3 + (2\cdot 10)\cdot 3 + 8\cdot 3$. Произведения в скобках могут быть найдены по таблице умножения однозначных чисел: $12\cdot 10^2 + 6\cdot 10 + 24$. Видим, что умножение многозначного числа на однозначное свелось к умножению однозначных чисел. Но чтобы получить окончательный результат, надо преобразовать выражение $12\cdot 10^2 + 6\cdot 10 + 24$ – коэффициенты перед степенями 10 должны быть меньше 10. Для этого представим число 12 в виде $1\cdot10 + 2$, а число 24 в виде $2\cdot10 + 4$. Затем в выражении $(1\cdot10 + 2)\cdot10^2 + 6\cdot10 + (2\cdot10 + 4)$ раскроем скобки: $1\cdot10^3 + 2\cdot10^2 + 6\cdot10 + 2\cdot10 + 4$. На основании ассоциативности сложения и дистрибутивности умножения относительно сложения сгруппируем слагаемые $6\cdot10$ и $2\cdot10$ и вынесем 10 за скобки: $1\cdot10^3 + 2\cdot10^2 + (6 + 2)\cdot10 + 4$. Сумма 6 + 2 есть сумма однозначных чисел и может быть найдена по таблице сложения: $1\cdot10^3 + 2\cdot10^2 + 8\cdot10 + 4$. Полученное выражение есть десятичная запись числа 1284, т.е. $428\cdot3 = 1284$.

Таким образом, умножение многозначного числа на однозначное основывается на:

- записи чисел в десятичной системе счисления;
- свойствах сложения и умножения;
- таблицах сложения и умножения однозначных чисел.

Выведем правило умножения многозначного числа на однозначное в общем виде. Пусть требуется умножить $x = a_{n\cdot} \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$ на однозначное число y.

$xy = (a_{n\cdot} \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_0)y = (a_{n\cdot}y) \cdot 10^n + \ldots + (a_0 y)$, причем преобразования выполнены на основании свойств умножения. После этого, используя таблицу умножения, заменяем все произведения $a_k \cdot y$, где $0 \le k \le n$, соответствующими значениями $a_k \cdot y = b_k \cdot 10 + c$ и получаем: $x \cdot y = (b_n 10 + c_n)\cdot10^n + (b_{n-1}\cdot10 + + c_{n-1}) \cdot 10^{n-1} + \ldots + (b_1 \cdot 10 + c_1)\cdot 10 + (b_0 \cdot 10 + c_0) = b_n\cdot 10^{n+1} + (c_n + +b_{n-1}) \cdot 10^n + \ldots + (c_1 + b_0) \cdot 10 + c_0$. По таблице сложения заменяем суммы $c_k + b_{k-1}$, где $0 \le k \le n$ и $k = 0, 1, 2, ..., n$, их значениями. Если, например, c_0 однозначно, то последняя цифра произведения равна m, а к скобке $(c + b_0)$ надо прибавить 1. Продолжая этот процесс, получим десятичную запись числа $x \cdot y$.

Описанный процесс позволяет сформулировать в общем виде алгоритм умножения многозначного числа $x = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ на однозначное число y.

1.Записываем второе число под первым.

2.Умножаем цифры разряда единиц числа x. на число y. Если произведение меньше 10, его записываем в разряд единиц ответа и переходим к следующему разряду (десятков).

3.Если произведение цифр единиц числа $x.$ на число y больше или равно 10, то представляем его в виде $10q_1 + c_0$, где c_0 – однозначное число; записываем c_0 в разряд единиц ответа и запоминаем q_1 – перенос в следующий разряд.

4.Умножаем цифры разряда десятков на число y, прибавляем к полученному произведению число q_1 и повторяем процесс, описанный в пп.2 и 3.

5.Процесс умножения заканчивается, когда окажется умноженной цифра старшего разряда.

Как известно, умножение числа $x.$ на число вида 10^k сводится к приписыванию к десятичной записи данного числа k нулей.

Рассмотрим алгоритм умножения многозначного числа на многозначное. Обратимся сначала к примеру, с которого начинали, т.е. к произведению $428 \cdot 263$. Представим число 263 в виде суммы $2{\cdot}10^2 + 6{\cdot}10 + 3$ и запишем произведение $428 \cdot (2{\cdot}10^2 + 6{\cdot}10 + 3)$. Оно, согласно дистрибутивности умножения относительно сложения, равно $428 \cdot (2{\cdot}10^2) + 428 \cdot (6 \cdot 10) + 428 \cdot 3$. Отсюда, применив ассоциативное свойство умножения, получим: $(428 \cdot 2){\cdot}10^2 + (428 \cdot 6){\cdot}10 + 428 \cdot 3$. Видим, что умножение многозначного числа 428 на многозначное число 263 свелось к умножению многозначного числа 428 на однозначные числа 2, 6 и 3, а также на степени 10.

Рассмотрим умножение многозначного числа на многозначное в общем виде.

Пусть $x.$ и y – многозначные числа, причем $y = b_m{\cdot}10^m + b_{m-1}{\cdot}10^{m-1} + \ldots + b_0$. В силу дистрибутивности умножения относительно сложения, а также ассоциативности умножения можно записать: $xy = x{\cdot}(b_m{\cdot}10^m + b_{m-1}{\cdot}10^{m-1} + \ldots + b_0) = (x{\cdot}b_m){\cdot}10^m + (x{\cdot}b_{m-1}){\cdot}10^{m-1} + \ldots + x{\cdot}b_0$. Последовательно умножая число x на однозначные числа $b_m, b_{m-1}, \ldots, b_0$, а затем на $10^m, 10^{m-1}, \ldots, 1$, получаем слагаемые, сумма которых равна xy. Приходим к алгоритму умножения числа $x = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ на число $y = \overline{b_m b_{m-1} \ldots b_1 b_0}$.

1.Записываем множитель x и под ним второй множитель y.

2.Умножаем число x на младший разряд b_0 числа y и записываем произведение $x{\cdot}b_0$ под числом y.

3.Умножаем число x на следующий разряд b_1 числа y и записываем произведение $x \cdot b_1$, но со сдвигом на один разряд влево, что соответствует умножению $x \cdot b_1$ на 10.

4.Продолжаем вычисление произведений до вычисления $x \cdot b_k$.

5.Полученные $k + 1$ произведения складываем.

Изучение алгоритма умножения многозначных чисел в начальном курсе математики, как правило, проходит в соответствии с выделенными этапами. Различия имеются только в записи. Например, при обосновании случая умножения многозначного числа на однозначное пишут: $428 \cdot 3 = (400 + 20 + 8) \cdot 3 = 400 \cdot 3 + 20 \cdot 3 + 8 \cdot 3 = 1200 + 60 + 24 = 1284$. Основой выполненных преобразований являются:

- представление первого множителя в виде суммы разрядных слагаемых (т.е. запись числа в десятичной системе счисления);

- правило умножения суммы на число (или дистрибутивность умножения относительно сложения);

- умножение «круглых» (т.е. оканчивающихся нулями) чисел на однозначное число, что сводится к умножению однозначных чисел.

Алгоритм деления. Когда речь идет о технике деления чисел, то этот процесс рассматривают как действие деления с остатком: разделить целое неотрицательное число a на натуральное число b – это значит найти такие целые неотрицательные числа q и r, что $a = bq + r$, причем $0 \leq r < b$.

Выясним сначала, как осуществляется деление на однозначное число. Если на однозначное число делят однозначное или двузначное (не превышающее 89), то используется таблица умножения однозначных чисел. Например, частным чисел 54 и 9 будет число 6, так как $9 \cdot 6 – 54$. Если же надо разделить 51 и 9, то находят ближайшее к нему меньшее число, которое делится на 9 – это число 45, и, следовательно, неполным частным при делении 51 на 9 будет число 5. Чтобы найти остаток, надо из 51 вычесть 45 : $51 – 45 = 6$. Таким образом, $51 = 9 \cdot 5 + 6$, т.е. при делении 51 на 9 получается неполное частное 5 и остаток, равный 6.

Записать это можно иначе, при помощи деления уголком:

$$\begin{array}{r|l} 51 & 9 \\ \cline{2-2} \underline{45} & 5 \\ 6 & \end{array}$$

Будем теперь делить трехзначное число на однозначное, например, 378 на 4. Разделить 378 на 4 – это значит найти такое неполное частное q и остаток r, что $378 = 4q + r$, причем остаток r должен удовлетворять условию $0 \leq r < b$, а неполное частное q – условию $4q \leq 378 < 4(q + 1)$.

Определим, сколько цифр будет содержаться в записи числа q. Однозначным число q быть не может, так как тогда произведение $4q$ может быть максимально равно 36 и, значит, не будут выполняться условия, сформулированные выше для r и q. Если число q двузначное, т.е. если $10 < q < 100$, то тогда $40 < 4q < 400$ и, следовательно, $40 < 378 < 400$, что верно. Значит, частное чисел 378 и 4 – число двузначное.

Чтобы найти цифру десятков частного, умножим последовательно делитель 4 на 20, 30, 40 и т.д. Поскольку $4 \cdot 90 = 360$, а $4 \cdot 100 = 400$, и $360 < 378 < 400$, то неполное частное заключено между числами 90 и 100, т.е. $q = 90 + q_0$. Но тогда должны выполняться неравенства: $4 \cdot (90 + q_0) < 378 < 4 \cdot (90 \cdot q + q_0 + 1)$, откуда $360 + 4q_0 < 378 < 360 + 4 \cdot (q_0 + 1)$ и $4q_0 < 18 < 4(q_0 + 1)$. Число q_0 (цифра единиц частного), удовлетворяющее последнему неравенству, можно найти подбором, воспользовавшись таблицей умножения. Получаем, что $q_0 = 4$ и, следовательно, неполное частное $q = 90 + 4 = 94$. Остаток находится вычитанием: $378 – 4 \cdot 94 = 2$.

Итак, при делении числа 378 на 4 получается неполное частное 94 и остаток 2: $378 = 4 \cdot 94 + 2$.

Описанный процесс является основой деления уголком:

$$\begin{array}{r|l} 378 & 4 \\ \cline{2-2} -\underline{36} & 94 \\ 18 & \\ -\underline{16} & \\ 2 & \end{array}$$

Аналогично выполняется деление многозначного числа на многозначное. Разделим, например, 4316 на 52. Выполнить это деление – значит найти такие целые неотрицательные числа q и r, что $4316 = 52q + r$, $0 \le r < 52$, а неполное частное должно удовлетворять неравенству $52q < 4316 < 52(q + 1)$.

Определим число цифр в частном q. Очевидно, частное заключено между числами 10 и 100 (т.е. q – двузначное число), так как $520 < 4316 < 5200$. Чтобы найти цифру десятков частного, умножим последовательно делитель 52 на 20, 30, 40, 50 и т.д. Поскольку $52 \cdot 80 = 4160$, а $52 \cdot 90 = 4680$ и $4160 < 4316 < 4680$, то неполное частное заключено между числами 80 и 90, т. е. $q = 80 + q_0$. Но тогда должны выполняться неравенства:

$$52 \cdot (80 + q_0) \le 4316 < 52 \cdot (80 + q_0 + 1),$$
$$4160 + 52q_0 \le 4316 < 4160 + 52 \cdot (q_0 + 1),$$
$$52\, q_0 \le 156 < 52 \cdot (q_0 + 1).$$

Число q_0 (цифру единиц частного), удовлетворяющее последнему неравенству, можно найти подбором: $156 = 52 \cdot 3$, т.е. имеем случай, когда остаток равен 0. Следовательно, при делении 4316 на 52 получается частное 83.

Приведенные рассуждения лежат в основе деления уголком:

$$\begin{array}{r|l} 4316 & \underline{52} \\ \underline{-416} & 83 \\ 156 & \\ \underline{-156} & \\ 0 & \end{array}$$

Обобщением различных случаев деления целого неотрицательного числа a на натуральное число b является следующий алгоритм деления уголком.

1.Если $a = b$, то частное $q = 1$, остаток $r = 0$.

2.Если $a > b$ и число разрядов в числах a и b одинаково, то частное q находим перебором, последовательно умножая b на 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, так как $a < 10b$. Этот перебор можно ускорить, выполнив деление с остатком цифр старших разрядов чисел a и b.

3.Если $a > b$ и число разрядов в числе a больше, чем в числе b, то записываем делимое a и справа от него делитель b, который отделяем от a уголком и ведем поиск частного и остатка в такой последовательности:

а) выделяем в числе a столько старших разрядов, сколько разрядов в числе b или, если необходимо, на один разряд больше, но так, чтобы они образовывали число d_1, больше или равное b. Перебором находим частное q_1 чисел d_1 и b, последовательно умножая b на 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Записываем q_1 под уголком (ниже b).

б) умножаем b на q_1 и записываем произведение под числом a так, чтобы младший разряд числа bq_1 был написан под младшим разрядом выделенного числа d_1.

в) проводим черту под bq, и находим разность $r_1=d_1-bd_1$.

г) записываем разность r_1 под числом bq_1, приписываем справа к r_1 старший разряд из неиспользованных разрядов делимого a и сравниваем число d_2 с числом b.

д) если полученное число d_2 больше или равно b, то относительно него поступаем согласно п. 1 или п. 2. Частное q_2 записываем после q_1.

е) если полученное число d_2 меньше b, то приписываем еще столько следующих разрядов, сколько необходимо, чтобы получить первое число d_3, большее или равное b. В этом случае записываем после q_1 такое же число нулей. Затем относительно d_3 поступаем согласно пп. 1, 2. Частное q_2 записываем после нулей. Если при использовании младшего разряда числа a окажется, что $d_3 < b$, то тогда частное чисел d_3 и b равно нулю, и этот нуль записывается последним разрядом к частному, а остаток $r=d_3$.

Арифметические действия над числами в p-ичной системе счисления. Арифметические действия над числами в позиционных системах счисления с основанием p ($p\neq10$) выполняются по тем же правилам, что и в десятичной системе счисления. Надо только иметь соответствующие таблицы сложения и умножения однозначных чисел. Они используются так же и при вычитании и делении однозначных и многозначных чисел.

В качестве примера приведем таблицы, иллюстрирующие сложение и умножение чисел в восьмеричной системе счисления. Используя эти таблицы, можно выполнить все четыре арифметических действия с числами, записанными в восьмеричной системе счисления.

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

x	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10	12	14	16
3	0	3	6	11	14	17	22	25
4	0	4	10	14	20	24	30	34
5	0	5	12	17	24	31	36	43
6	0	6	14	22	30	36	44	52
7	0	7	16	25	34	43	52	61

Например, найдем значение суммы двух чисел 23651_8 и 17043_8. Воспользуемся алгоритмом сложения многозначных чисел для десятичной системы счисления: запишем эти числа «столбиком» и начнем вычисления с младшего разряда.

$$\begin{array}{r} {}_{+}23651_8 \\ \underline{17043_8} \\ 42714_8 \end{array}$$

Теперь найдем значение разности чисел 5732_8 и 2445_8. Для нахождения результата разности воспользуемся таблицей сложения.

$$\begin{array}{r} -5742_8 \\ \underline{2445_8} \\ 3275_8 \end{array}$$

Перейдем теперь к умножению. Основой для умножения любых чисел служит таблица умножения, определяющая произведения чисел, меньших, чем основание системы счисления. У нас имеется таблица умножения чисел, записанных в восьмеричной системе счисления. Найдем значение произведения чисел $3645_8 \cdot 42_8$. Для этого запишем эти числа «столбиком» и воспользуемся алгоритмом выполнения действия умножения для десятичной системы счисления.

$$\begin{array}{r} \times 3645_8 \\ \underline{42_8} \\ 7512 \\ +\underline{17224} \\ 201752_8 \end{array}$$

Опираясь на эту же таблицу выполним действие деления чисел $731_8 : 13_8$. Запишем эти числа соответствующим образом для выполнения письменного деления многозначных чисел и воспользуемся алгоритмом деления, принятым в десятичной системе счисления.

$$\begin{array}{r|l} -731_8 & 13_8 \\ \cline{2-2} \underline{67} & 53_8 \\ -41 & \\ \underline{41} & \\ 0 & \end{array}$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Замените сумму краткой записью числа (запишите числа в соответствующей системе счисления):

1) $4 \cdot 7^3 + 6 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7 + 5$; 2) $2 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 0$;

3) $8 \cdot 9^5 + 1 \cdot 9^4 + 7 \cdot 9^3 + 2 \cdot 9 + 1$;

4) $1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1$.

2. Запишите число, в котором:

а) *x* десятков и две единицы;

б) *y* сотен семь десятков и *x* единиц;

в) *m* десятков и *в* единиц.

3. Запишите числа в виде суммы степеней основания с соответствующими коэффициентами:

1) 52013_6; 2) 2103210_4;

3) 23021_5; 4) $4981A_{11}$.

4. Сколько в числе 597 306: 1) десятков; 2) единиц тысяч; 3) десятков; 4) десятков тысяч; 5) сотен; 6) сотен тысяч?

5. Напишите наибольшее и наименьшее двузначные числа в системе счисления с основанием: 10, 3, 6, 12, 3.

6. Сумма цифр двузначного числа равна 16. Если из этого числа вычесть число, записанное теми же цифрами, но взятыми в обратном порядке, то получится 18. Найдите это число.

7. Цифра десятков в записи данного двузначного числа втрое больше цифры единиц. Если цифры переставить, то получится число, меньшее данного на 36. Найдите данное число.

8. Верно ли записаны числа в пятеричной системе счисления: 32014, 642, 11001, 5231, 333? Почему?

9. Напишите предшествующее и последующее числа для данных чисел: 25_6, 60_7, 448_9, $298B_{12}$, 333_4.

10. Запишите в троичной, семеричной и пятеричной системах счисления каждое из чисел: 486, 321, 28, 5481.

11. Запишите в шестеричной системе счисления числа: 4287_9, 11001_2, 34202_7, $43CA_{15}$, $1A2B_{13}$, FFF_{16}.

12. Сравните числа: 473_8 и 2041_5; 21022_3 и 732_9.

13. В какой системе счисления верно равенство:

1) $314_x = 56$; 2) $401_x = 197$; 3) $236_x = 1240_5$?

14. Найдите основание системы счисления:

1) $306_x + 124_x = 220$; 2) $752_x – 647_x = 67$.

15. Найдите значение выражений:

1) $4732_8 + 1525_8$; 2) $3426_7 + 564_7$;

3) $24_5 + 33_5$; 4) $7231_8 – 472_8$;

5) $6223_7 - 4365_7$;
6) $4321_5 - 324_5$;
7) $375_8 \cdot 53_8$;
8) $3462_7 \cdot 15_7$;
9) $1324_5 \cdot 4_5$;
10) $73421_8 : 54_8$;
11) $46325_7 : 24_7$;
12) $2134_5 : 12_5$;
13) $76_8 \cdot 64_8 - 57_8 \cdot 26_8$;
14) $23213_5 : 32_5 - 113_5 \cdot 3_5$;
15) $3231_7 \cdot (123_7+3422_7) - 2341_7$;
16) $504_8 \cdot 62_8 - 37_8 \cdot 23_8 + 3725_8$.

16. Выполните действия и ответ запишите в троичной системе счисления:

1) $755_8 + 423_5 - 10101_2$;
2) $24_5 \cdot 47_8 + 11001_2$;
3) $617_8 + 204_5 - 101010_2$;
4) $232011_5 : 104_5 + 651_7$.

17. Перечислите базовые понятия, которыми должны владеть учащиеся к моменту изучения правила умножения многозначного числа на многозначное. Проанализируйте с этой точки зрения задание: «Объясните прием вычисления:

$$46 \cdot 38 = 46 \cdot (30 + 8) = 46 \cdot 30 + 48 \cdot 8 = 368 + 1380 = 1748.$$

18. Вычислите рациональным способом значение выражений и объясните, какие законы и свойства действий были при этом использованы:

1) $(375 + 2025) : 25$;
2) $(369 + 999) : 9$;
3) $(407 - 37) : 37$;
4) $(7575 - 75) : 75$;
5) $68 \cdot 1002$;
6) $999 \cdot 74$;
7) $4 \cdot 16 \cdot 19 \cdot 25$;
8) $693 : 77$;
9) $143 : 13$;
10) $168\,168 : 84$;
11) $4242 : 14$.

19. Вычислите значение частного двумя способами:

а) $(357 \cdot 77) : 11$;
б) $(4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 14) : 7$;
в) $(144 \cdot 321) : 12$;
г) $(2 \cdot 164 \cdot 125 \cdot 4) : 25$.

ДЕЛИМОСТЬ ЧИСЕЛ

Определение и свойства отношения делимости чисел на множестве целых неотрицательных чисел. В математике известно, что обратные арифметические действия не всегда выполнимы, т.е. результат этих действий над натуральными числами не всегда является натуральным числом или нулем. Но если для вычитания существует простой и общий признак выполнимости этого действия (для существования разности $a - b$ необходимо и достаточно, чтобы $a \geq b$), то для действия деления такого общего и простого признака не имеется.

Конечно, для того чтобы a (где $a \neq 0$) разделилось на b нацело, необходимо, чтобы $a \geq b$, ибо, если $a < b$, то, очевидно, a не может делиться на b. Но, если $a > b$, то этого еще недостаточно для делимости a на b.

Поиски признаков делимости чисел начались очень давно. В результате были не только найдены такие признаки, но и установлены очень важные, особые свойства натуральных чисел, изучением которых занимается специальная наука «теория чисел». Признаки делимости и некоторые связанные с ними вопросы образуют один из простейших разделов этой науки.

Для вывода признаков делимости установим некоторые общие свойства делимости чисел.

Определение. Число a делится на число b, если существует такое число с, что $a = b \cdot c$.

В этом случае, a называется *кратным* b, а b называется *делителем* a. Тот вариант, что a делится нацело на b (a является кратным b), символически записывается так $a \vdots b$. Если число не делится нацело на b, от записывают так $\overline{a \vdots b}$.

Например, $15 \vdots 5$, т.к. существует натуральное число 3, такое, что $15 = 5 \cdot 3$. $\overline{25 \vdots 7}$, т.к. нет такого натурального числа, которое при умножении на 7 давало бы значение произведения 25.

Укажем основные общие свойства делимости чисел:

Свойство 1. Число 0 делится на любое натуральное число.

В самом деле, для любого числа $b \in N_0$ существует неотрицательное целое число 0, при котором мы имеем: $0 = b \cdot 0$, т.к. $0 \in$ No, то по определению делимости $0 \vdots b$.

Свойство 2. Ни одно отличное от нуля число не делится на 0. $(\forall a \in N_0)\ \overline{a \vdots 0}$.

В самом деле, пусть $a \neq 0$. Так как $0 \cdot b = 0$ для любого b, принадлежащего N_0, то равенство $a = 0 \cdot b$ не может выполняться ни для какого значения b. Значит, а не делится на 0.

Свойство 3. Любое число делится на 1. $(\forall a \in N_0)\ a \vdots 1$, т.к. $a \cdot 1 = a$.

Свойство 4. Отношение делимости рефлексивно, т.е. любое число делится на себя. $(\forall a \in N)\ a \vdots a$.

Свойство 5. Отношение делимости антисимметрично.

$(\forall a, b \in N_0)(a \vdots b \wedge b \vdots a) \Rightarrow (a = b)$.

Свойство 6. Отношение делимости транзитивно, т.е. из $a \vdots b$ и $b \vdots c$ следует, что $a \vdots c$.

Докажем свойство 6.

$a \vdots b \Rightarrow (\exists q_1 \in N_0) \Rightarrow a = b \cdot q_1 (1)$

$b \vdots c \Rightarrow (\exists q_2 \in N_0) \Rightarrow b = c \cdot q_2 (2)$

В равенство (1) подставим значение b из равенства (2) и получим $a = c \cdot q_1 \cdot q_2 = c \cdot (q_1 \cdot q_2) \Rightarrow a \vdots c$.

Признаки делимости. Делимость суммы, разности.

Теорема 1. Если каждое слагаемое суммы делится на одно и то же число, то и значение этой суммы делится на это число, т.е. если $a \vdots k$, $b \vdots k$ и $c \vdots k$, то и $(a + b + c) \vdots k$.

Доказательство. Так как $a \vdots k, b \vdots k$ и $c \vdots k$, то $a = k \cdot q_1, b = k \cdot q_2$ и $c = k \cdot q_3$, тогда

$$a + b + c = k \cdot q_1 + k \cdot q_2 + k \cdot q_3 = k \cdot q \Rightarrow (a + b + c) \vdots k.$$

Теорема 2. Если два числа делятся порознь на одно и то же третье число, то и значение разности первых двух чисел делится на третье число, т.е., если $a \vdots c$ и $b \vdots c$, то $(a - b) \vdots c$, при этом $a \geq b$.

Теорема доказывается аналогично первой.

Следствие 1. Значение суммы (разности) чисел может делиться на какое-либо число и в том случае, когда не каждое из данных чисел делится на это число.

Например, 4+3+8=15, 15:5, но $\overline{3 \vdots 5}$, $\overline{4 \vdots 5}$, $\overline{8 \vdots 5}$.

Теорема 3. Если значение суммы нескольких чисел и все слагаемые, кроме одного, делятся на одно и то же число, то и это слагаемое должно делиться на это число.

Если $(a+b+c+d) \vdots k$ и $a \vdots k$, $b \vdots k$, $c \vdots k$, то $d \vdots k$.

Доказательство. Так как $a \vdots k$, $b \vdots k$, $c \vdots k$, то $(a+b+c) \vdots k$. Представим число d в виде разности двух сумм: $(a + b + c + d) – (a + b + c) = d$, $(a+b+c+d) \vdots k$ и $(a+b+c) \vdots k$ по теореме 2 следует, что $d \vdots k$.

Теорема 4. Если $(a-b) \vdots k$ и $a \vdots k$, то $b \vdots k$.

Если $(a-b) \vdots k$ и $b \vdots k$, то $a \vdots k$.

Доказательство теоремы 4 аналогично доказательству теоремы 3.

Следствие 2. Если все слагаемые некоторой суммы, за исключением одного, делятся на какое-либо число, а это слагаемое не делится на данное число, то и значение суммы на это число не делится, т.е. если $a \vdots k$, $b \vdots k$, $c \vdots k$, но $\overline{d \vdots k}$, то $\overline{(a+b+c+d) \vdots k}$.

Доказательство (метод от противного). Допустим, что $(a+b+c+d) \vdots k$. Т.к. по условию $a \vdots k$, $b \vdots k$, $c \vdots k$, то по теореме 3 и $d \vdots k$, что противоречит условию теоремы.

Следствие 3. Если $a \vdots k$, но $\overline{b \vdots k}$, то $\overline{(a-b) \vdots k}$.

Если $\overline{a \vdots k}$, но $b \vdots k$, то $\overline{(a-b) \vdots k}$.

Теорема 5. Значение суммы двух слагаемых делится на k тогда и только тогда, когда значение суммы остатков от деления каждого слагаемого делится на число k (необходимое и достаточное условие делимости суммы на число).

Доказательство. Пусть числа a и b делятся на k с остатком, тогда $a = k \cdot q_1 + r_1$ и 0<r_1<k, $b = k \cdot q_2 + r_2$ и 0<r_2<b.

$$a + b = k \cdot q_1 + r_1 + k \cdot q_2 + r_2 = k \cdot (q_1 + q_2) + (r_1 + r_2),$$

$$a + b = k \cdot (q_1 + q_2) + (r_1 + r_2).$$

Если $(a + b)\vdots k$, то и $(r_1 + r_2)\vdots k$. Если значение суммы делится на k и первое слагаемое делится на k, то и второе слагаемое делится на k.

Если $(r_1 + r_2)\vdots k$, то $(a + b)\vdots k$. Если каждое слагаемое суммы делится на k, то и значение суммы делится на k. Теорема доказана.

Делимость произведения. Теорема 6. Для того чтобы значение произведения нескольких чисел делилось на какое-либо число, достаточно, чтобы на это число делился хотя бы один из множителей, т.е. если $a \vdots k$, то $(a \cdot b \cdot c \cdot d)\vdots k$.

Доказательство. Если $a \vdots k$, то $a = k \cdot q$.

$(a \cdot b \cdot c \cdot d) = k \cdot (q \cdot b \cdot c \cdot d) = k \cdot m, \Rightarrow (a \cdot b \cdot c \cdot d)\vdots k$.

Следствие 4. Это условие делимости произведения на какое-либо число является достаточным, но не является необходимым, т.е. значение произведения нескольких чисел может разделиться на число и в том случае, когда ни один из множителей не делится на это число.

Например, значение произведения чисел $3, 4$ и 5 $(3 \cdot 4 \cdot 5 = 60)$ делится на 15, но $\overline{3 \vdots 15}$, $\overline{4 \vdots 15}$, $\overline{5 \vdots 15}$.

Пример. Доказать, что произведение трех последовательных натуральных чисел кратно 3.

Доказательство. Даны три последовательных натуральных числа: a, a+1, a+2. Число a может быть кратным 3 и может делиться на 3 с остатком. Остаток может быть равен 1 или 2. Рассмотрим 3 различных случая:

1)$a \vdots 3 \Rightarrow a = 3k;$

2)$\overline{a \vdots 3} \Rightarrow a = 3k + 1;$

3)$\overline{a \vdots 3} \Rightarrow a = 3k + 2.x.$

Если $a \vdots 3$, то в произведении $a(a + 1)(a + 2) = 3k(3k + 1)(3k + 2)$ первый множитель делится на 3. Тогда по теореме 5 и значение произведения делится на 3.

Если при делении a на 3 в остатке получается 1, то в произведении $(3k + 1)(3k + 2)(3k + 3)$ третий множитель делится на 3.

Если при делении a на 3 в остатке получается 2, то в произведении $(3k + 2)(3k + 3)(3k + 4)$ второй множитель делится на 3. По теореме 5, во втором и третьем случаях, значение произведения делится на 3.

Признаки делимости на определенные числа в десятичной системе счисления. Признаки делимости на определенные числа известны уже давно. Так, признак делимости на 2 был известен уже древним египтянам, признаки делимости на 3, на 9, на 11 и на некоторые другие числа были широко известны в средние века (XI – XIII вв.).

В 17 веке великий французский математик Блез Паскаль (1623 – 1662 гг.) впервые вывел общий признак делимости чисел на любое число.

Изложим сущность общего признака делимости Паскаля.

Общий признак Паскаля. Условием необходимым и достаточным для делимости числа n на число d, является делимость на d числа $R = a_k \cdot r_k + a_{k-1} \cdot r_{k-1} + ... + a_1 \cdot r_1 + a_0$, где r_i – остаток от деления 10^i на d.

Пусть мы хотим узнать, делится ли число n на d. Пусть a_k, a_{k-1}, …, a_1, a_0, цифры входящие в запись числа n в десятичной системе счисления, т.е.

$$n = \overline{a_k a_{k-1} .. a_1 a_0} = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + ... + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

где $a_k \in N_0$ и $a_k \neq 0$.

Каждую из степеней 10 разделим на d с остатком.

Пусть $10^k = d \cdot q_k + r_k$, $10^{k-1} = d \cdot q_{k-1} + r_{k-1}$, …, $10 = d \cdot q_1 + r_1$.

Тогда $n = a_k(d \cdot q_k + r_k) + ... + a_1(d \cdot q_1 + r_1) + a_0 =$

$= d(a_k \cdot q_k + a_{k-1} \cdot q_{k-1} + .. + a_1 \cdot q_1) +$

$+ (a_k \cdot r_k + a_{k-1} \cdot r_{k-1} + ... + a_1 \cdot r_1 + a_0) = d \cdot m + R,$

где $m = a_k \cdot q_k + a_{k-1} \cdot q_{k-1} + .. + a_1 \cdot q_1,$

$$R = a_k \cdot r_k + a_{k-1} \cdot r_{k-1} + \ldots + a_1 \cdot r_1 + a_0. \; n = d \cdot m + R.$$

В последнем равенстве первое слагаемое $(d \cdot m)$ кратно d, если R кратно d, то n кратно d по теореме 1.

Если n кратно d, то R кратно d по теореме 3.

Для делимости n на d необходимо и достаточно, чтобы $R \vdots d$, а т. к. R значительно меньше n, то тем самым проверка делимости n на d сводится к проверке делимости на d значительного меньшего числа R.

П р и м е р. Установим, делится ли число n = 235634 на d=7.

Для этого найдем остатки от деления 10 на 7.

$$10 = 7 \cdot 1 + 3, \; r_1 = 3;$$
$$10^2 = 7 \cdot 14 + 2, \; r_2 = 2;$$
$$10^3 = 7 \cdot 142 + 6, \; r_3 = 6;$$
$$10^4 = 7 \cdot 1428 + 4, \; r_4 = 4;$$
$$10^5 = 7 \cdot 14285 + 5, \; r_5 = 5.$$

Следовательно, $R = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 = 77$. Т.к. R = 77, $77 \vdots 7$, то $235634 \vdots 7$.

Заметим, что если мы применим отрицательные остатки, то вычисления несколько упростятся. Так, $10^3 = 7 \cdot 143 - 1$, (r_3 = – 1); $10^4 = 7 \cdot 1429 - 3$ (r_4 = – 3); $10^5 = 7 \cdot 14286 - 2$ (r_5 = – 2). Следовательно, $R = 2 \cdot (-2) + 3 \cdot (-3) + 5 \cdot (-1) + 6 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 7$.

Из общего признака делимости Паскаля можно получить много частных признаков.

П р и з н а к д е л и м о с т и н а 2. На 2 делятся те и только те числа, у которых, число, изображенное последней цифрой, делится на 2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть число n записано в десятичной системе счисления, т.е. $n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$.

Т.к. любая натуральная степень 10 делится на 2, то все остатки от деления степеней 10 на 2 равны 0, т.е. r_i= 0 ($i \geq 1$).

Следовательно, $R = a_k \cdot 0 + a_{k-1} \cdot 0 + \ldots + a_1 \cdot 0 + a_0 = a_0$. По признаку Паскаля, число n будет делиться на 2, если a_0 будет делиться на 2.

Признак делимости на 5. Для того чтобы число n делилось на 5, необходимо и достаточно, чтобы его десятичная запись оканчивалась цифрой 0 или 5.

Доказательство этого признака аналогично доказательству признака делимости на 2.

Признак делимости на 3 (или на 9). На 3 или на 9 делятся те, и только те числа, у которых значение суммы чисел, образованных цифрами данного числа, делится на 3 или на 9 соответственно.

Доказательство. Т.к. $10^n = 1\underbrace{000\ldots0}_{n} = \underbrace{9999\ldots9}_{n} + 1$, а $\underbrace{999..99}_{n} \vdots 9(3)$, то остаток от деления любой натуральной степени 10 на 3 или на 9 равен 1, т.е. каково бы ни было i всегда $r_i=1$.

Следовательно,

$$R = a_k \cdot 1 + a_{k-1} \cdot 1 + \ldots + a_1 \cdot 1 + a_0 = a_k + a_{k-1} + \ldots + a_1 + a_0 .$$

Согласно признаку Паскаля, число будет делиться на 3 или 9, если значение суммы чисел, образованных цифрами данного числа, будет делиться на 3 или 9.

Пример 1. Установить, делится ли число $n = 3264578$ на 3.

Решение. Вычислим значение суммы чисел, образованных цифрами данного числа.

$$R = 3 + 2 + 6 + 4 + 5 + 7 + 8 = 35,\ \overline{35 \vdots 3},\text{ то } \overline{n \vdots 3}.$$

Практически, нет необходимости находить всю сумму чисел, образованных цифрами данного числа, достаточно, складывая числа, исключать из получающейся суммы числа, которые делятся на 3.

Пример 2. Установить, делится ли число $n = 435297357$ на 9.

Если непосредственно применять признак делимости, то надо найти: $R = 4 + 3 + 5 + 2 + 9 + 7 + 3 + 5 + 7 = 45$. Т.к. $45 \vdots 9$, то $n \vdots 9$.

Проще, однако, находя постепенно сумму чисел, образованных цифрами данного числа, исключать числа, кратные 9, а цифру 9 и вовсе не учитывать. Тогда получим: 4 + 3 = 7, 7 + 5 = 12, вычтем 9, остается 3, 3 + 2 = 5, исключаем 9, 5 + 7 = 12, вычтем 9, остается 3, далее 3 + 3 + 5 = 11, 11 – 9 =2, наконец, 2 + 7 = 9, вычтем 9, остается 0. Но 0 делится на любое число, в том числе, и на 9, значит и $n \vdots 9$.

Заметим, что еще больше можно упростить вычисления, если числа, образованные цифрами данного числа складывать не по порядку, а так, чтобы получающаяся сумма была кратна 9. 4 + 5 = 9, 2 + 7 = 9, 3 + 3 + 5 = 11, вычитаем 9, остается 2, наконец, 2 + 7 = 9, $9 \vdots 9$ и $435297357 \vdots 9$.

Признак делимости на 4. Для того чтобы число n делилось на 4, необходимо и достаточно, чтобы на 4 делилось двузначное число, образованное двумя последними цифрами десятичной записи числа n.

Доказательство. Пусть число n записано в десятичной системе счисления

$$n = \overline{a_k a_{k-1} .. a_1 a_0} = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + ... + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

где $a_k \in N_0$ и $a_k \neq 0$ и две последние цифры образуют число, которое делится на 4. Так как $100 \vdots 4$, то

$$(a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + .. + a_2 \cdot 10^2) \vdots 4 .$$

По условию $a_{1.} \cdot 10 + a_0$ (это и есть запись двузначного числа) также делится на 4. Следовательно, согласно теореме о делимости суммы и само число n делится на 4.

Докажем обратное, т. е. если число n делится на 4, то двузначное число, образованное последними цифрами его десятичной записи делится на 4.

Запишем двузначное число, образованное последними двумя цифрами в виде:

$$a_1 \cdot 10 + a_0 = n - (a_k 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + ... + a_2 \cdot 10^2) .$$

Так как $n \vdots 4$ и, то по теореме о делимости разности $(a_1 \cdot 10 + a_0) \vdots 4$. Но выражение $a_1 \cdot 10 + a_0$ есть запись двузначного числа, образованного последними цифрами записи числа n.

Например, если n= 43652, то $n = 436 \cdot 100 + 52$. Так как $52 \vdots 4$, то $43652 \vdots 4$.

Признак делимости на 8. Для того чтобы число *n* делилось на 8, необходимо и достаточно, чтобы на 8 делилось число, образованное последними тремя цифрами десятичной записи числа.

Доказательство этого признака аналогично доказательству признака делимости на 4.

Признак делимости на 25. Число *n* делится на 25 в том и только в том случае, когда его десятичная запись оканчивается либо на 00, либо на 25, либо на 50, либо на 75.

Доказательство этого признака аналогично доказательству признака делимости на 4.

Признак делимости на 11. На 11 делятся те и только те числа, у которых значение разности между значением суммы чисел, обозначенных цифрами, стоящих на нечетных местах в записи данного числа, и значением суммы чисел, обозначенных цифрами, стоящих на четных местах, равна 11.

Доказательство. Определим остатки от деления 10^k на 11.

$10 = 11 \cdot 1 - 1$; $10^2 = 11 \cdot 9 + 1$; $10^3 = 11 \cdot 91 - 1$; $10^4 = 11 \cdot 909 + 1$ и т.д.

Значит: $r_1 = (-1)$; $r_2 = = 1$; $r_3 = (-1)$; $r_4 = 1$ и т. д.

Вообще, если показатель степени четный, то остаток от деления на 11 будет равен 1, т.е. $r_{2i} = 1$, если же показатель степени нечетный, то остаток от деления на 11 будет равен (– 1), т.е. $r_{2i-1} = (-1)$.

Вычислим сумму остатков (R) от деления 10^k на 11.

$$R = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7 \ldots = (a_0 + a_2 + a_4 + a_6 + \ldots) - (a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \ldots).$$

По признаку делимости Паскаля, если $R \vdots 11$, то $n \vdots 11$.

Например, $\overline{36578429 \vdots 11}$, т.к.

$R = (9 + 4 + 7 + 6) - (2 + 8 + 5 + 3) = 8$, $\overline{8 \vdots 11}$.

Делимость целых неотрицательных чисел в начальных классах специально не изучается. Но использование правил деления суммы на число и числа на произведение требует предварительного ответа на вопрос: делится ли одно число на другое. Отвечая на этот вопрос, учащиеся начальных классов руководствуются таблицей умножения, а не признаками делимости. Поэтому и задания в учебниках математики содержатся такие, которые позволяют обходиться только таблицей. Например, чтобы из выражений (62 + 18) : 8, (36 + 27) : 9 выбрать то, в котором каждое слагаемое делится на указанное число, учащийся должен хорошо знать, что на 9 делится и 36, и 27, а, например числа 62 и 18 на 8 не делятся. Аналогично, чтобы найти значение выражения 720 : (9 · 5) таким способом: (720 : 9) : 5, учащийся должен знать, что 720 делится на 9, 80 делится на 5, т. е. знать еще и отдельные случаи внетабличного деления.

Простые и составные числа. Используя признаки делимости чисел, а в тех случаях, когда удобных признаков нет, с помощью непосредственного испытания, мы можем найти все делители любого заданного числа.

Найдем все делители натуральных чисел в пределах первого десятка и 0.

Числа	Делители числа	Количество делителей числа
1	1	1
2	1, 2	2
3	1, 3	2
4	1, 2, 4	3
5	1, 5	2
6	1, 2, 3, 6	4
7	1, 7	2
8	1, 2, 4, 8	4
9	1, 3, 9	3
10	1, 2, 5, 10	4
0	1, 2, 3, …	∞

Анализируя полученную таблицу и мысленно продолжая эту таблицу для чисел, больших 10, мы можем прийти к такому выводу: все неотрицательные целые числа по количеству делителей распределяются на 4 непересекающихся класса.

1 класс. Число 1 – имеет один делитель.

2 класс. Числа, имеющие только 2 делителя. Такие числа называют простыми. Например, простые числа – 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 и т.д.

Определение 1. Натуральное число, большее 1, называется *простым*, если оно не имеет других делителей, кроме себя и единицы.

3 класс. Числа, имеющие более двух делителей. Числа 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26 имеют более двух делителей. Такие числа называются составными.

Определение 2. Натуральное число называется *составным*, если оно имеет другие делители, кроме самого себя и 1.

Число 1 не является ни простым, ни составным.

4 класс. Число 0. Это число имеет бесконечное множество делителей.

Простые числа. Простейший способ отыскания всех простых чисел, не больше данного числа, был представлен древнеегипетским математиком Эратосфеном, жившим в III веке до н.э. Этот способ состоит в следующем: пусть мы хотим найти все простые числа, не больше 40. Выпишем тогда все натуральные числа от 1 до 40. Лучше это сделать в виде прямоугольной таблицы.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40

Если мы теперь вычеркнем в этой таблице все непростые числа, то в ней останутся одни простые числа.

1). Вычеркнем 1.

2). Вычеркнем теперь все числа, кратные 2, кроме первого встретившего.

3). 3 – простое число. Вычеркивание следует начинать с $3^2=9$, ибо числа, кратные 3 и меньше 3^2, должны иметь другие делители, меньше 3, т.е. кратны 2 и, следовательно, уже вычеркнуты.

4). 5 – первое не вычеркнутое простое число. Оно простое, т.к., если бы оно было составным, то оно было бы кратно какому-нибудь числу, меньше его, а среди чисел, кратным числам меньше 5 (т.е. кратным 2 и 3) числа 5 не оказалось. Вычеркиваем числа кратные 5. Вычеркивание можно начать с числа $5^2 = 25$, т.к. числа кратные 5 и меньше 25, должны быть также кратны числу, меньше 5, а такие числа уже вычеркнуты. Простые числа от 1 до 40: 2, 3, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 33, 39.

Этот способ отыскания всех простых чисел, не больших данного числа, иногда называют «решетом Эратосфена», ибо во времена Эратосфена писали на восковых дощечках, вычеркивание числа производили простым прокалыванием дощечки в соответствующем месте. Но это название имеет и определенный смысл: сам этот способ напоминает «решето» или «сито», ибо мы как бы просеиваем все натуральные числа, составные числа при этом отсеиваются, остаются простые.

Теорема 1. Всякое натуральное число, больше единицы, имеет хотя бы один простой делитель.

Доказательство этой теоремы проведем методом математической индукции. Рассмотрим сначала наименьшее натуральное число 2, большее, чем 1. Для этого числа наше утверждение справедливо, так как 2 делится нам 2.

Допустим теперь, что это утверждение справедливо для всех натуральных чисел, больших 1 и меньших, чем число n. Докажем, что тогда утверждение справедливо для числа n. Возможно одно из двух: 1) n – простое, 2) n – число составное.

Если имеет случай 1), то теорема доказана, так как n делится на n. Если имеет случай 2), то $n = n_1 \cdot n_2$, где $1 < n_1 < n$. Для числа n_1 теорема верна, следовательно, n_1 делится хотя бы на одно простое число p. Тогда и n тоже делится на p (по теореме о делимости произведения).

Теорема 2. Пусть d – наименьший среди больших единицы натуральных делителей числа a. Тогда d – простое число.

Доказательство. Предположим, что число d делится на t и $t < d$. Докажем, что $t = 1$. По условию $a \vdots d$, по предположению

$d \vdots t$, следовательно, по свойству транзитивности $a \vdots t$. Если $t > 1$, то $t < d$ противоречит выбору d как наименьшего среди больших единицы делителей.

Следовательно, $t = 1$, т.е. d имеет два натуральных делителя: d и 1, т. е. d простое число.

Пример 1. Дано число 15. Делители числа 15 числа 3 и 5. Число 3 – наименьший делитель, 3 – простое число.

Метод решета Эратосфена позволяет отыскивать все простые числа, не превосходящие заданного натурального числа n. Но он не дает ответа на вопрос, конечно или бесконечно множество простых чисел. В III веке до н. э. греческий математик Евклид доказал, что множество простых чисел бесконечно. Приведем доказательство этого утверждения, называемого теоремой Евклида о простых числах.

Теорема 3. Множество простых чисел бесконечно.

Доказательство (метод от противного). Пусть множество простых чисел конечно: $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$. Образуем тогда произведение этих простых чисел и прибавим к нему 1.

Рассмотрим число $n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots p_n + 1$ (1). Это число является либо простым, либо составным. Простым оно быть не может, т.к. оно больше всех чисел в ряде $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$, а мы предположили, что других простых чисел, кроме них, не существует.

Если n – составное число, оно должно иметь хотя бы один простой делитель. p_1 не является делителем числа n, так как в равенстве (1) первое слагаемое на p_1 делится, а второе слагаемое 1 на p_1 не делится. Аналогично можно показать, что $p_2, p_3, \ldots..,$ p_n не являются делителями числа n. Получим, что n не имеет ни одного простого делителя. Получили противоречие. Следовательно, наше предположение неверно. Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема 4. Наименьший простой делитель составного числа не превосходит $\sqrt{a}$.

Доказательство. Пусть a – составное число, а p – наименьший простой делитель числа a. Т.к. a – составное число, а p – его наименьший простой делитель, то $a = p \cdot b$. При этом $p \le b$, т.к. иначе простой делитель числа b был бы меньше, чем p, а тогда число a имело бы простые делители, меньше чем p.

Умножим обе части неравенства $p \le b$ на p. $p^2 \le p \cdot b$. Следовательно, $p^2 \le a$, т. е. $p \le \sqrt{a}$.

Из данного утверждения следует, что если число a не делится ни на одно простое число, не превосходящее $\sqrt{a}$, то у него совсем нет простых делителей, меньше этого числа, т.е. это число простое.

Пример 2. Установить, является ли число 871 простым или составным.

Для этого надо испытать делимость 871 на простые числа, не большие $\sqrt{871}$, т.е. не больше 29. $\sqrt{871} \approx 30$. Следовательно, надо испытать делимость 871 на такие числа: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

$871 \vdots 13$, следовательно, 871 – число составное.

Основная теорема арифметики натуральных чисел. Условимся считать два разложения на множители одинаковыми, если они отличаются друг от друга лишь порядком множителей.

Например, $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2$.

Теорема. Любое составное число можно представить единственным образом в виде произведения простых множителей.

Доказательство. Докажем, что такое разложение существует и что оно единственно.

Существование. Предположим, что это утверждение неверно, т.е. существуют составные числа, которые нельзя разложить на простые множители. Тогда в множестве А таких чисел есть наименьшее число a. Так как в множестве А все числа составные, то и a – составное число. Поэтому его можно представить в виде произведения двух множителей a_1 и a_2, каждый из которых меньше, чем a, $a = a_1 \cdot a_2$, причем $a_1 < a$ и $a_2 < a$. Так как числа a_1 и a_2 меньше a, то они не принадлежат множеству А (ведь a – наименьшее число в этом множестве). Поэтому они или простые, или разлагаются в произведение простых чисел.

Если $a_1 = p_{1\cdot} \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_m$ и $a_2 = q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_t$, где p_1, …, p_{m}, q_1, q_2, …, q_{t} – простые числа, то $a = a_1 \cdot a_2 = p_1 \cdot p_2 \cdot ... p_m \cdot q_1 \cdot q_{2\cdot} \cdot ... \cdot q_t$.

Мы получили разложение числа a на простые множители, а это противоречит предположению, что a не разлагается на простые множители. Полученное противоречие доказывает, что наше предположение неверно, т.е. составных чисел, которые не разлагаются в произведение простых множителей, не существует.

Единственность, т. е. что два разложения составного числа на простые множители отличаются друг от друга лишь порядком множителей.

Предположим, что существуют натуральные числа, имеющие различные разложения на простые множители. Так как, по предположению множество A непусто, в нем есть наименьшее число a, которое по условию имеет два различных разложения на простые множители: $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_m$ и $a = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_t$.

Тогда $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_m = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_t$. (1).

Правая часть этого равенства делится на число q_1. Значит, и левая часть делится на q_1. Следовательно, хотя бы один из множителей p_1, p_2, …, p_m делится на q_1. Переставляя, если это понадобится, множители, можно считать, что на q_1 делится p_1. Но если простое число p_1 делится на простое число q_1, то эти простые числа равны, $p_1 = q_1$.

Сократим обе части равенства (1) на p_1. Мы получим равенство $c = p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_m = q_2 \cdot q_3 \cdot \ldots \cdot q_t$, где $c = a : p_1$. Так как $p_1 > 1$,то $c < a$. Но по предположению a – наименьшее из чисел, имеющих различные разложения на простые множители. Значит, число сможет иметь лишь одно разложение на простые множители. А это значит, что разложения $c = p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_m$ и $c = q_2 \cdot q_3 \cdot \ldots \cdot q_{\mathrm{t}}$ могут отличаться друг от друга лишь порядком множителей. Но тогда поскольку $p_1 = q_1$ разложения $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_m$ и $a = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_t$ отличаются друг от друга лишь порядком множителей. Это противоречит предположению, что разложения различны. Полученное противоречие доказывает, что натуральных чисел имеющих различное разложение на множители, не существует. Теорема доказана.

Наибольший общий делитель и его свойства. Часто приходится отыскивать делители не одного числа, а общие делители двух или больше чисел. Например, для того чтобы сократить обыкновенную дробь, надо найти общие делители числителя и знаменателя, а еще лучше найти наименьший общий делитель членов дроби и сразу сократить на него дробь.

Определение 1. *Общим делителем нескольких чис*ел называется такое натуральное число, на которое делятся все данные числа.

Пример. Найдем общие делители чисел 12 и 24. Делителями числа 12 является множество чисел $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$. Делителями числа 24 является множество чисел $\{1, 2, 3, 4, 6, 12, 24\}$. Общими делителями чисел 12 и 24 является пересечение множеств делителей числа 12 и числа 24, т. е. $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \cap \{1, 2, 3, 4, 6, 12, 24\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.

Общих делителей двух или нескольких чисел – конечное число. Поэтому среди общих делителей двух или нескольких чисел существует наибольший.

Определение 2. *Наибольшим общим делителем* чисел a и b называется самое большое натуральное число d, являющееся делителем для каждого из чисел a и b.

Наибольший общий делитель чисел a и b будем обозначать НОД (a, b).

В выше рассмотренном примере НОД (12, 24) = 12.

Свойства наибольшего общего делителя. Наибольший общий делитель обладает следующими свойствами:

Свойство 1. Наибольший общий делитель не больше наименьшего из всех данных чисел.

Доказательство. Пусть даны числа a, b, c и пусть $a < b < c$, т.е. наименьшее из всех данных чисел есть a. Пусть НОД $(a, b, c) = d$. Так как $a \vdots d$, то $a \geq d$. т. е. d не больше наименьшего из данных чисел.

Свойство 2. Каковы ни были данные числа, всегда существует единственный их наибольший общий делитель.

Доказательство. Если дано несколько чисел, то один общий их делитель мы всегда сумеем найти, каковы бы эти числа ни были бы: этим общим делителем будет единица, ибо на единицу делятся все числа. Если других делителей эти числа не имеют, то наибольший общий делитель их равен единице.

Если же эти числа, кроме 1, имеют еще другие общие делители, то множество их всегда ограничено, ибо любой общий делитель не больше наименьшего из данных чисел. Следовательно, и в этом случае среди общих делителей существует единственный наибольший общий делитель.

Определение. Числа, наибольший общий делитель их равен единице, называются *взаимно простыми.*

Свойство 3. Если каждое из данных чисел умножить на натуральное число, то наибольший общий делитель этих чисел умножится на это число.

Если НОД $(a, b) = d$ и $k \in N$, то НОД $(a \cdot k, b \cdot k) = k \cdot d$.

Свойство 4. Если каждое из данных чисел разделить на натуральное число, то наибольший общий делитель этих чисел разделится на это число.

Свойство 5. Наибольший общий делитель нескольких чисел не изменится, если любую пару этих чисел заменить их наибольшими общими делителями.

Свойство 6. Наибольший общий делитель двух чисел делится на любой общий делитель этих чисел.

Свойства 3-6 принимаем без доказательства.

Способы вычисления наибольшего общего делителя. Наибольший общий делитель можно вычислять различными способами.

Первый способ. Способ основан на каноническом разложении данных чисел на простые множители.

Определение. Разложение вида $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$, где $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$, называют *каноническим* разложением числа а.

Наибольший общий делитель данных чисел представляет собой значение произведения общих простых множителей в разложении данных чисел с наименьшими показателями степеней.

Пример 1. Найти наибольший общий делитель чисел 144 и 180.

Решение. Разложим числа 144 и 180 на простые множители.

144 = $2^4 \cdot 3^2$, 180 = $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$,

НОД (144, 180) = $2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$.

Вообще, чтобы найти наибольший общий делитель данных чисел предлагаем следующий алгоритм.

Алгоритм нахождения НОД ((a, b):

1) представляем каждое данное число в каноническом виде;

2) образуем произведение общих для всех данных чисел простых множителей, причем каждый из них берем с наименьшим показателем, с каким он входит во все разложения данных чисел;

3) находим значение этого произведения – оно и будет наибольшим общим делителем данных чисел.

Первый способ для отыскания НОД нескольких чисел практически можно применять для сравнительно небольших чисел и в тех случаях, когда легко найти или каноническое разложение данных чисел, или их общие делители.

Существует способ, который позволяет с меньшими трудностями находить наибольший общий делитель.

Второй способ. Наиболее рациональный способ был предложен Евклидом (III в. до н.э.). Для отыскания наибольшего общего делителя дух чисел применяется способ последовательного деления, которой называется *алгоритмом Евклида*.

Теорема. Пусть $a = bq + r$, где a, b, q, r – целые неотрицательные числа, тогда НОД (a, b) = НОД (b, r).

Данная теорема дает возможность при отыскании наибольшего общего делителя какой-либо пары чисел (a, b), заменить ее меньшей парой, для которой наибольший общий делитель находится проще.

Алгоритм Евклида. Если число a разделить с остатком на $b \neq 0$, затем разделить с остатком b на полученный остаток, затем разделить с остатком первый остаток на второй и т.д., то последний, отличный от нуля остаток равен НОД (a, b).

Доказательство. Пусть даны два целых числа a и b, причем будем считать число b положительным, а число a неотрицательным. Разделим a на b с остатком. Получим: $a = bq + r_1$; $0 \le r_1 < b$.

Если окажется, что $r_1 = 0$, то процесс последовательного деления закончен. Допустим, $r_1 \ne 0$. Тогда разделим b на r_1 с остатком. Получим: $b = r_1q_2 + r_2$; $0 \le r_2 < r_1$.

Если окажется, что $r_2 = 0$, процесс последовательного деления закончен. Допустим, что $r_2 \neq 0$. Тогда разделим r_1 на r_2 с остатком. Получим: $r_1 = r_2q_3 + r_3$; $0 \le r_3 < r_2$.

Так будем поступать и дальше, т.е. будем делить каждый остаток на последующий остаток, разумеется, если делитель будет отличен от 0. $r_{k-2} = r_{k-1}q_k + r_k$; $r_k < r_{k-1}$, , $r_{k-1} = r_kq_{k+1} + 0$.

Мы получили цепочку убывающих неотрицательных чисел: $b > r_1 > r_2 > r_3 > \ldots > r_{k-1} > r_k$.

Эти остатки все время уменьшаются, а так как они все целые неотрицательные числа, то через определенное число шагов мы обязательно придем к остатку, равному нулю.

Для доказательства того, что r_k есть наибольший общий делитель чисел a и b, рассмотрим полученные равенства, идя сверху вниз и используя теорему.

НОД (a, b) = НОД (b, r_1) = НОД (r_1, r_2) = НОД (r_2, r_3) = … = НОД (r_{k-1}, r_k) = НОД $(r_k, 0) = r_k$.

Пример 2. Найти наибольший общий делитель чисел 1232 и 1672.

Мы имеем $1672 = 1232 \cdot 1 + 440$.

Теперь разделим 1323 на 440: $1232 = 440 \cdot 2 + 352$.

Далее делим 440 на 352: $440 = 352 \cdot 1 + 88$.

Наконец, делим 352 на 88: $352 = 88 \cdot 4$. Деление выполнено без остатка. Значит, наименьший отличный от нуля остаток равен 88, т. е. НОД(1232, 1672) = 88.

Вычисления, производимые нами, часто располагают так:

$$1672 = 1232 \cdot 1 + 440$$

$$1232 = 440 \cdot 2 + 352$$

$$440 = 352 \cdot 1 + 88$$

$$352 = 88 \cdot 4$$

НОД(1232, 1672) = 88.

Наименьшее общее кратное и его свойства.

Определение 1. *Общим кратным* нескольких чисел называется такое число, которое кратно каждому из данных чисел, т.е. иными словами число, которое делится на все данные числа.

Множество общих кратных чисел a и b является пересечением множества чисел, кратных a с множеством чисел, кратных b.

Например. Пусть A – множество чисел, кратных 4, B – множество чисел, кратных 6. Данные множества бесконечны.

A = {4, 8, 12, 20, 24, 28, 32, 36, …4n, …},

B = {6, 12, 18, 24, 30, 36,…, 6n,…}, где $n \in N$.

Общим кратным чисел 4 и 6 является множество

C = $A \cap B$. $A \cap B$ = {12, 24, 36, …, 12n, …}, где $n \in N$.

Определение 2. *Наименьшим общим кратным чисел a и b* называется наименьшее число из всех общих кратных чисел a и b.

Наименьшее общее кратное чисел a и b будем обозначать НОК (a, b). НОК (4, 12) = 12.

Свойства наименьшего общего кратного. Наименьшее общее кратное обладает следующими свойствами.

Свойство 1. Наименьшее общее кратное натуральных чисел a и b всегда существует и является единственным.

Свойство 2. Наименьшее общее кратное натуральных чисел a и b не меньше большего из данных чисел, т.е. если $a > b$, то $НОК(a,b) \geq a$.

Свойство 3. Любое общее кратное двух натуральных чисел a и b делится на их наименьшее общее кратное.

Доказательство. Обозначим общее кратное чисел a и b через m (ОК (a, b) = m), а НОК (a, b) через k. Разделим число m на k с остатком: $m = kq + r$, где $0 \leq r < k$. Докажем, что $r = 0$.

По условию ОК (a, b) = m, следовательно, по определению общего кратного имеем $m \vdots a$ и $m \vdots b$. Так как НОК (a, b) = k, то $k \vdots a$ и $k \vdots b$. Рассмотрим равенство $m = kq + r$. В данном равенстве $m \vdots a$, $kq \vdots a$, следовательно, $r \vdots a$. В равенстве $m = kq + r$ $m \vdots b$, $kq \vdots b$ следовательно, $r \vdots b$. Таким образом, получили $r \vdots a$ и $r \vdots b$, если $r \neq 0$, то r = ОК (a, b) и $r \geq k$, где k = НОК (a, b). Но этого быть не может, так как остаток меньше делителя. Значит, r не может быть отличным от нуля. Итак, $r = 0$. Значит, $m = kq$, $m \vdots k$. Свойство доказано.

Свойство 4. Если НОК (a, b) = k, то для любого натурального числа c верно равенство НОК (ac, bc) = kc.

Свойство 5. Если число c является общим делителем натуральных чисел a и b, то число $h = \frac{a \cdot b}{c}$ общее кратное чисел a и b.

Для любых натуральных чисел a и b справедлива следующая теорема.

Теорема. Наименьшее общее кратное двух чисел равно значению частного от деления значения произведения этих чисел на их наибольший общий делитель $НОК\,(a,b) = \frac{a \cdot b}{НОД\,(a,b)}$.

Доказательство. Пусть НОД (a, b) = d, ОК (a, b) = m.

Так как m есть общее кратное чисел a и b, то $m \vdots a$ и, следовательно, $m = aq$. Точно так же m делится на b и, следовательно, $m = bq_1$.

Из этих двух равенств имеем: $aq = bq_1$ (1).

Так как d наибольший общий делитель чисел a и b, то $a = a_1d$ и $b = b_1d$. Равенство (1) можно переписать так: $a_1dq = b_1dq_1$.

Сократим на d. Получим: $a_1q = b_1q_1$.

Правая часть этого равенства делится на b_1. Значит, и левая часть, т.е. a_1q тоже делится на b_1. Однако a_1 и b_1 взаимно простые числа, следовательно, q делится на b_1. Значит, $q = b_1t$, где t – целое число.

Теперь имеем $m = ab_1t$. Из $b = b_1d \Rightarrow b_1 = \frac{b}{d}$. Таким образом, выражение для всех чисел, которые являются общими кратными чисел a и b, оказывается таким: $m = \frac{ab}{d} \cdot t$, где t – некоторое целое число. Наименьшее значение общего кратного это выражение имеет при $t = 1$, т.е. $НОК(a,b) = \frac{a \cdot b}{НОД(a,b)}$.

Назовем следствия из теоремы, приняв их без доказательства.

Следствие 1. $НОД(a,b) \cdot НОК(a,b) = a \cdot b$.

Следствие 2. Если НОД (a, b) = 1, т.е. числа a и b взаимно простые, то $НОК(a,b) = a \cdot b$. Наименьшее общее кратное двух взаимно простых натуральных чисел равно значению произведения этих чисел.

Следствие 3. Наибольший общий делитель натуральных чисел a и b делится на любой общий делитель этих чисел.

Следствие 4. Если значение произведения $a \cdot b$ натуральных чисел a и b делится на натуральное число m и a взаимно просто с m, то b делится на m.

Следствие 5. Если натуральное число a делится на каждое из взаимно простых чисел b и c, то оно делится и на их значение произведения.

Признак делимости на составное число. Для того чтобы число n делилось на число $d = b \cdot c$, где b и c взаимно простые числа, необходимо и достаточно, чтобы n делилось на b и c.

Справедливость достаточности следует из свойства 5. Необходимость же его установить легко. Действительно, если $n \vdots (b \cdot c)$, то очевидно $n \vdots b$ и $n \vdots c$.

Признак делимости на 6. Для того чтобы натуральное число n делилось на 6 необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 2 и на 3.

Признак делимости на 12. Для того чтобы натуральное число n делилось на 12 необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 3 и на 4.

Способы вычисления наименьшего общего кратного. Наименьшее общее кратное нескольких чисел можно вычислить двумя способами.

Первый способ основан на каноническом разложении данных чисел на простые множители.

Чтобы найти наименьшее общее кратное данных чисел предлагаем следующий алгоритм.

Алгоритм нахождения НОК $((a, b)$:

1) представляем каждое данное число в каноническом виде;

2) образуем произведение из всех простых множителей, находящихся в разложении данных чисел, причем каждый берем с наибольшим показателем, с каким он входит во все разложения данных чисел;

3) находим значение этого произведения – оно и будет наименьшим общим кратным данных чисел.

Пример 1. Найдем наименьшее общее кратное чисел 60, 252 и 264.

Решение. Чтобы найти наименьшее общее кратное данных чисел:

1) представим каждое число в каноническом виде: $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$, $264 = 2^3 \cdot 3 \cdot 11$;

2) образуем произведение из всех простых множителей, причем каждый из них возьмем с наибольшим показателем, с каким он входит во все разложения данных чисел: $НОК(60,252,264) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 27720$.

Второй способ вычисления наименьшего общего кратного предполагает использование формулы:

$$НОК(a,b) = \frac{a \cdot b}{НОД(a,b)}.$$

Если числа a и b большие, то наибольший общий делитель можно вычислить с помощью алгоритма Евклида.

Пример 2. Найти наименьшее общее кратное чисел 1275 и 245.

По алгоритму Евклида найдем НОД (1275, 245) = 5.

Тогда $НОК(1275{,}245) = \dfrac{1275 \cdot 245}{5} = 62475$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Не находя суммы чисел, установите, делится ли она на 3:

   а) 261 +132; б) 370 + 143; в) 372 + 143.

2. Не находя суммы чисел, установите, делится ли она на 9:

а) 222 111 + 25 308 + 28 054;

б) 222 111 + 25 308 + 27 054;

в) 222 111 + 25 308 + 13 721.

3. Установите, не производя вычислений, значения каких выражений делится на 4:

а) $2512\cdot 127$; б) $134\cdot 270$; в) $148\cdot 272$.

4. Известно, что число a кратно 19. Является ли кратным 19 число:

а) $a + 19$; б) $2a + 32$; в) $6a - 38$; г) $5a\cdot 17$?

5. Докажите, что значение выражения $14a + 49b - 98c$ при любых натуральных значения a, b и c кратно 7.

6. Докажите, что значение выражения $15x - 27y + 111z + 2$ при любых натуральных значениях x, y, z не кратно 3.

7. Составьте сумму из двузначного, трехзначного и четырехзначного чисел, записанных с помощью одной и той же цифры. Почему эта сумма делится на 3?

8. Докажите, что всякое трехзначное число, в записи которого используются только одинаковые цифры, делится на 37.

9. Докажите, что разность между трехзначным числом и числом, составленным из тех же цифр, но взятых в обратном порядке, делится на 9.

10. Докажите, что всякое четырехзначное число вида $\overline{7aa7}$ делится на 11.

11. Докажите, что сумма квадратов трех последовательных натуральных чисел не делится на 3.

12. Докажите, что если натуральное число при делении на 5 дает в остатке 1, то и квадрат его при делении на 5 дает остаток 1.

13. Докажите, что для любых целых неотрицательных чисел a и b число $ab(a^2 - b^2)$ делится на 3.

14. Докажите, что сумма трех последовательных натуральных степеней числа 3 делится на 13.

15. Пользуясь общим признаком делимости числа исследовать, будет ли: 71 927 кратно 17; 335 041 кратно 23; 427 343 кратно 41; 63 276 кратно 29.

16. Из цифр 1, 5, 5, 0, 7 составить пять различных пятизначных чисел так, чтобы получались числа, кратные: 5, 3, 9, 10.

17. Поставьте в числе 2 050 603 вместо нулей такие цифры, чтобы оно делилось на 2, на 3, на 9 и на 11.

18. Вместо звездочек поставьте цифры так, чтобы получилось число, делящееся:

а) на 5: 483*, 34*0, *31; б) на 9: 179*, 54*0, 5*31;
в) на 3: 24*7, 1*6, *22; г) на 8: 257*4, 3*22, 4355*;
д) на 11: 2033*, 471*85.

19. Выведите признаки делимости на 8 и на 25.

20. Сформулируйте признаки делимости:

а) на 18; б) на 45; в) на 75; г) на 28.

21. Среди следующих высказываний укажите истинные:

а) если два числа a и b простые, то a и b взаимно простые;

б) если числа a и b не имеют общих множителей, то они есть числа простые;

в) если числа a и b взаимно простые, то a и b простые;

г) если числа a и b взаимно простые, то каждое из них лишь делится на себя и на 1.

22. Могут ли два соседних нечетных чисел оказаться простыми?

23. Могут ли два соседних числа натуральных числа быть простыми?

24. Найдите НОД и НОК следующих пар чисел:

а) 826 и 658; б) 840 и 1320;
в) 413 и 987; г) 3762 и 4446;
д) 3960 и 4736; е) 115198 и 55687.

25. Докажите, что НОД $(2n, 2n + 2) = 2$ при любом натуральном значении n.

26. Докажите, что НОД $(6025, 1728) = 1$.

27. Во сколько раз НОД (6855, 10 005) больше, чем НОД (1679, 2231)?

28. Найдите наименьшее общее кратное чисел 4 565 и 960, вычислив наибольший общий делитель этих чисел с помощью алгоритма Евклида.

29. Известно, что если НОД чисел a и b равен 17, то числа имеют вид: $a = 17k$; $b = 17c$. Чему равен НОД чисел k и c?

30. При делении чисел 4373 и 826 на одно и то же число получили остатки 8 и 7. На какое число делили?

31. Найдите числа a и b, если:

а) $ab = 39690$, НОД $(a, b) = 63$;

б) НОК $(a, b) = 1820$, НОД $(a, b) = 28$, $a = 364$;

в) $ab = 780$, НОД $(a, b) = 2$;

г) $a + b = 270$, НОД $(a, b) = 54$;

д) НОД $(a, b) = 24$, НОК $(a, b) = 1320$, НОК $(a, b):b = 11$.

32. Имеется 60 красных гвоздик и 48 белых. Какое наибольшее число букетов можно сделать из этих гвоздик, если в каждом букете должно быть по одинаковому числу красных и белых гвоздик?

33. Малая шестерня велосипеда имеет 8 зубцов, а большая – 18 зубцов. Какое наименьшее число оборотов должна сделать педаль, чтобы заднее колесо и большая шестерня вернулась в свое первоначальное положение?

34. Требуется приготовить ящик с квадратным дном для укладки коробок шириной 9 см и длиной 21 см. Какова должна быть наименьшая величина стороны квадрата, чтобы коробки поместились в ящике вплотную?

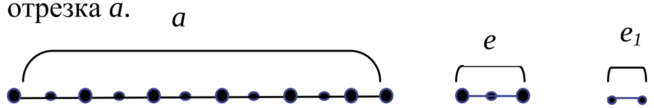
35. Набольший общий делитель чисел a и b равен 18. Ряд значений частного при нахождении наибольшего общего делителя этих чисел способом последовательного деления 11, 5, 1, 1, 2. Какие это числа? Проверьте правильность решения, вычислив наибольший общий делитель этих чисел другим способом.

2. РАСШИРЕНИЕ МНОЖЕСТВА ЦЕЛЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

МНОЖЕСТВО РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Расширение множества целых неотрицательных чисел. Как известно одним из подходов к получению числа является измерение величин. Ранее мы рассмотрели случай (см. Ч. 1), когда единица измерения укладывалась в измеряемой величине точное число раз. В результате мы получили множество целых неотрицательных чисел. Жизненная практика показывает, что такая ситуация получается не всегда. Рассмотрим подобную ситуацию.

Пусть даны отрезок a и единичный отрезок e. Определим длину отрезка a.



С этой целью измерим отрезок a единичным отрезком e. Результат измерения запишем в виде неравенства $5e < a < 6e$. В данном случае единичный отрезок не уложился целое число раз.

Найдем такую новую единицу измерения, которая бы укладывалась и в том, и в другом отрезке целое число раз. Например, $e = 2e_1$, тогда получился следующий результат измерения отрезка $a = 11e_1$.

Мы выразили длину отрезков через одну и ту же единицу измерения, получили соизмеримые величины.

Определение 1. Две однородные величины называются *соизмеримыми*, если можно найти такую единицу измерения данных величин, которая укладывается и в той, и в другой величине целое число раз.

Определение 2. Величина называется *соизмеримой* со своей единицей измерения, если найдется такая доля единицы измерения, которая укладывается в данной величине целое число раз.

Подобных ситуаций может быть много. Искать новую единицу измерения не всегда удобно.

Более удобной будет ситуация оставлять единичный отрезок неизменным, а в качестве новой единицы брать такой отрезок, который получается в результате деления единичного отрезка на равные части. Тогда при измерении величины следует указывать, на какое число частей делится данный единичный отрезок и сколько таких частей содержит измеряемый отрезок.

В таком случае результат измерения будет выражаться парой чисел. В нашем примере (11, 2).

Числа в паре записаны в определенном порядке:

- на первом месте результат измерения искомого отрезка,
- на втором – выражение длины единичного отрезка в новой единице измерения.

Принято записывать такую пару в виде $\frac{11}{2}$.

Определение 3. Назовем n-й долей отрезка e отрезок f такой, что $e \cong nf$. Будем писать $m_e(a) = \frac{p}{n}$, если отрезок a есть сумма p отрезков длины $\frac{1}{n}e$. Тогда $a \cong \frac{p}{n}e$.

Получили, что отрезок a соизмерим с единичным отрезком e. Символически это записывается так $m_e(a) = \frac{p}{n} \Leftrightarrow na \cong pe$.

Определение 4. Числа вида $\frac{p}{n}$ будем называть *обыкновенной дробью*.

Определение 5. Число, записанное под чертой, называется *знаменателем дроби*. Знаменатель дроби показывает, на сколько равных долей разделена исходная единица измерения.

Определение 6. Число, записанное над чертой, называется *числителем дроби*. Числитель дроби показывает, сколько таких долей содержится в измеряемой величине.

Определение 7. Черта, разделяющая числитель и знаменатель называется *дробной чертой*.

Например: запись $\frac{3}{5}$ показывает, что исходная единица разделена на 5 равных долей, таких долей взяли 3. Читается «три пятых».

Определение 8. Дробь называется *правильной*, если ее числитель меньше знаменателя. Дробь называется *неправильной*, если ее числитель больше знаменателя.

Например: дробь $\frac{3}{5}$ – правильная дробь, т.к. числитель дроби меньше знаменателя; дробь $\frac{8}{5}$ – неправильная, т.к. числитель дроби больше знаменателя.

Свойства дробей. Основное свойство дроби. Длина одного и того же отрезка a при заданном единичном отрезке e может выражаться различными дробями.

Рассмотрим преобразование, используя свойство равенств, согласно которого если равны правые части, то равны и левые.

$$na \cong pe \Rightarrow (\forall m)(nm)a \cong (pm)e \Rightarrow \left| \begin{matrix} m_e(a) = \dfrac{p}{n} \\ m_e(a) = \dfrac{pm}{nm} \end{matrix} \right| \Rightarrow \frac{p}{n} = \frac{pm}{nm}.$$

Следствие 1. Если числитель и знаменатель обыкновенной дроби увеличить или уменьшить в несколько раз, то величина дроби не изменится.

Пример 1. $\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{6}{10}$.

Следствие 2. Если числитель дроби увеличить или уменьшить в несколько раз, то дробь соответственно увеличится или уменьшится во столько же раз.

Пример 2. $\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5} = \frac{6}{5}$, $\frac{3}{5} < \frac{6}{5}$.

Следствие 3. Если знаменатель дроби увеличить или уменьшить в несколько раз, то дробь соответственно уменьшится или увеличится во столько же раз.

Пример 3. $\frac{3}{5}=\frac{3}{5\cdot 2}=\frac{3}{10}$, $\frac{3}{5}>\frac{3}{10}$.

Эквивалентные дроби. Теорема. Для того чтобы дроби $\frac{p}{n}$ и $\frac{l}{q}$ выражали длину одного и того же отрезка a, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство натуральных чисел $pq=nl$.

Необходимость. Пусть длина отрезка a выражена двумя дробями:

$$\begin{aligned} m_e(a) &= \frac{p}{n} \Rightarrow na \cong pe \\ m_e(a) &= \frac{l}{q} \Rightarrow qa \cong le \end{aligned}.$$

Первое равенство умножим на q, второе – на n. Имеем:

$$\left.\begin{aligned} na \cong pe\,|\cdot q &\Rightarrow (nq)a \cong (pq)e \\ qa \cong le\,|\cdot n &\Rightarrow (qn)a \cong (nl)e \end{aligned}\right| \Rightarrow (pq)e \cong (nl)e.$$

Это равенство может иметь место только если $pq=nl$.

Что и требовалось доказать

Достаточность.

Пусть $pq=nl$ и $m_e(a)=\frac{p}{n}$, $m_e(b)=\frac{l}{q}$. Тогда $a=b$.

$$m_e(a) = \frac{p}{n} \Rightarrow na \cong pe$$

$$m_e(b) = \frac{l}{q} \Rightarrow qb \cong le$$

Первое равенство умножим на q, второе – на n и, учитывая, что $pq=nl$ имеем

$$\left.\begin{aligned} na \cong pe\,|\cdot q &\Rightarrow (nq)a \cong (pq)e \\ qb \cong le\,|\cdot n &\Rightarrow (qn)b \cong (nl)e \end{aligned}\right| \Rightarrow (nq)a \cong (qn)b \Rightarrow a \cong b$$

Определение. Дроби $\frac{p}{n}$ и $\frac{l}{q}$ называются *эквивалентными*, если они обладают свойством $pq=nl$.

Символически это записывается так $\frac{p}{n} \approx \frac{l}{q} \Leftrightarrow pq = nl$.

Пример. Эквивалентны ли дроби $\frac{3}{5} * \frac{6}{10}$?

Решение. Воспользуемся определением эквивалентных дробей. По определению $3 \cdot 10 = 5 \cdot 6$, имеем 30 = 30. Следовательно, $\frac{3}{5} \approx \frac{6}{10}$.

Множество рациональных чисел и его свойства. Рассмотрим множество эквивалентных дробей. Докажем, что отношение между эквивалентными дробями есть отношение эквивалентности, т.е. обладает свойствами рефлексивности, симметричности, транзитивности.

Пусть известно M – множество положительных дробей $\frac{m}{n}, \frac{k}{l}, \frac{s}{p} \in M$, и эти дроби эквивалентны между собой, т.е. выполняется отношение $R: \frac{m}{n} \approx \frac{k}{l} \approx \frac{s}{p}$.

Рефлексивность $\frac{m}{n} \approx \frac{m}{n}$.

По определению эквивалентных дробей имеем:

$$\frac{m}{n} \approx \frac{m}{n} \Rightarrow mn = nm.$$

Так как m, $n \in N$, то справедлив коммутативный закон умножения, т.е. $mn = nm$, отсюда следует, что $\frac{m}{n} \approx \frac{m}{n}$.

Следовательно, рефлексивность выполняется: каждая дробь эквивалентна сама себе.

Симметричность $\frac{m}{n} \approx \frac{k}{l} \Rightarrow \frac{k}{l} \approx \frac{m}{n}$.

Согласно определения эквивалентных дробей, запишем:

$$\frac{m}{n} \approx \frac{k}{l} \Rightarrow ml = nk.$$

Отношение равенства во множестве N обладает свойством симметричности, поэтому можно записать $ml = nk \Rightarrow nk = ml$. По коммутативности умножения во множестве N имеем $ml = nk \Rightarrow kn = lm$. Тогда из определения эквивалентных дробей следует $kn = lm \Rightarrow \frac{k}{l} \approx \frac{m}{n}$.

Следовательно $\frac{m}{n} \approx \frac{k}{l} \Rightarrow \frac{k}{l} \approx \frac{m}{n}$, т.е. симметричность выполняется: если первая дробь эквивалентна второй, то вторая эквивалентна первой.

Транзитивность $\frac{m}{n} \approx \frac{k}{l}, \frac{k}{l} \approx \frac{s}{p} \Rightarrow \frac{m}{n} \approx \frac{s}{p}$.

По определению эквивалентных дробей имеем

$$\frac{m}{n} \approx \frac{k}{l} \Rightarrow ml = nk, \frac{k}{l} \approx \frac{s}{p} \Rightarrow kp = ls.$$

Умножим первое равенство на p, второе – на n, на основании теорем равносильности равенств, воспользовавшись транзитивностью отношения равенства во множестве N и т.к. $nkp = kpn$ по коммутативности умножения во множестве N получим $\left.\begin{array}{l} mlp = nkp \\ kpn = lsn \end{array}\right| \Rightarrow mlp = lsn$.

На основании теорем равносильности равенств разделим обе части равенства на l, получим $mp = sn$. Отсюда на основании определения эквивалентных дробей получим $\frac{m}{n} \approx \frac{s}{p}$.

Следовательно, транзитивность выполняется, а именно: $\frac{m}{n} \approx \frac{k}{l}, \frac{k}{l} \approx \frac{s}{p} \Rightarrow \frac{m}{n} \approx \frac{s}{p}$: если первая дробь эквивалентна второй, вторая – третьей, то первая дробь эквивалентна третьей.

Если отношение между эквивалентными дробями обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности, то это отношение есть отношение эквивалентности.

Отношение эквивалентности, заданное на множестве дробных чисел, позволяет разбить данное множество на классы эквивалентности.

В один и тот же класс попадут дроби, эквивалентные между собой.

Определение. Класс эквивалентных дробей называется *положительным рациональным числом*. В каждом классе эквивалентности находится бесконечно много эквивалентных между собой дробей, представляющих одно и то же рациональное число.

Название класса определяет единственная из дробей, а именно та, числитель и знаменатель которой есть взаимнопростые числа. Такая дробь называется *несократимой* дробью.

Способ получения несократимой дроби. Пусть $\frac{m}{n}$ – представитель класса эквивалентных дробей. Говорят, что это одна из форм записи соответствующего рационального числа. И пусть НОД(m, n) = $d \neq 1$. Тогда $\left.\begin{matrix} m = m_1 d \\ n = n_1 d \end{matrix}\right| \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{m_1 d}{n_1 d}$. На основании основного свойства дроби разделим числитель и знаменатель дроби на $d \neq 0$, получим дробь $\frac{m_1}{n_1}$, которая является несократимой, т.к. НОД(m_1, n_1) = 1 по свойству наибольшего общего делителя.

Покажем, что выполняется отношение $\frac{m}{n} \approx \frac{m_1}{n_1}$. Рассмотрим преобразование, выполненное на основании определения эквивалентных дробей:

$$\frac{m}{n} = \frac{m_1 d}{n_1 d} \Rightarrow m n_1 d = n m_1 d \Rightarrow m n_1 = n m_1 \Rightarrow \frac{m}{n} \approx \frac{m_1}{n_1}.$$

Получили правило: *чтобы получить несократимую дробь, достаточно числитель и знаменатель дроби разделить на их наибольший общий делитель.*

Задание. Сократить дробь $\frac{51}{85}$.

Решение. Чтобы сократить дробь $\frac{51}{85}$ найдем наибольший общий делитель чисел 51 и 85. Каноническое разложение чисел следующее: 51=3·17, 85=5·17.

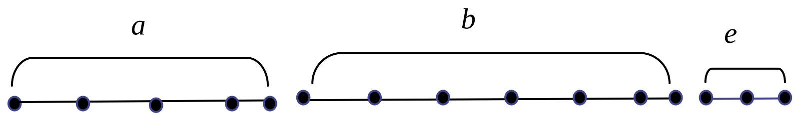
Следовательно, НОД(51, 85)=17.

Получаем $\frac{51}{85}=\frac{51:17}{85:17}=\frac{3}{5}$.

Сравнение рациональных чисел. Рациональные числа можно сравнивать между собой. Рассмотрим различные случаи сравнения.

Сравнение дробей с одинаковыми знаменателями. Пусть даны отрезки a и b и пусть между отрезками есть отношение $a < b$.

Измерим отрезки одним и тем же отрезком e, с которым они соизмеримы.



Имеем $m_e(a)=\frac{m}{n}e$, $m_e(b)=\frac{k}{n}e$.

Тогда отрезок a содержит n-х долей меньше, чем отрезок b, а именно: $m_e(a)<m_e(b)\Rightarrow\frac{m}{n}e<\frac{k}{n}e\Rightarrow\frac{m}{n}<\frac{k}{n}\Rightarrow m<k$.

Следовательно $\frac{m}{n}<\frac{k}{n}\Leftrightarrow m<k$, т.е. из двух дробей с одинаковыми знаменателями та больше, у которой числитель больше.

Аналогично можно установить равенство дробей с одинаковыми знаменателями: $\frac{m}{n} = \frac{k}{n} \Leftrightarrow m = k$.

Получаем правило: *чтобы сравнить дроби с одинаковыми знаменателями достаточно сравнить числители. Если числители дробей равны, то и дроби равны. Если числители дробей неравны, то та дробь больше, у которой числитель больше.*

Пример 1. Сравнить дроби $\frac{3}{10} * \frac{6}{10}$.

Решение. Знаменатели дробей одинаковы, следовательно, будет больше та дробь, у которой больше числитель. Вторая дробь имеет числитель больше, а именно 6 > 3. Поэтому можно записать $\frac{3}{10} < \frac{6}{10}$.

Сравнение дробей с разными знаменателями. Пусть даны дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{k}{l}$. Выведем условия равенства и неравенства дробей.

Каждую из этих дробей можно заменить эквивалентной ей дробью так, чтобы знаменатели у них были равны. С этой целью приведем дроби к общему знаменателю.

По основному свойству дроби имеем $\frac{m}{n} \approx \frac{ml}{nl}$, $\frac{k}{l} \approx \frac{kn}{nl}$.

Дроби с одинаковыми знаменателями сравнивать умеем. Получим правило сравнения дробей.

$$\begin{array}{l} \frac{ml}{nl} = \frac{kn}{nl} \Leftrightarrow ml = kn \\ \frac{ml}{nl} < \frac{kn}{nl} \Leftrightarrow ml < kn \end{array} \Bigg| \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{m}{n} = \frac{k}{l} \Leftrightarrow ml = kn \\ \frac{m}{n} < \frac{k}{l} \Leftrightarrow ml < kn \end{array}.$$

Правило: *чтобы сравнить дроби с разными знаменателями достаточно привести их к общему знаменателю и сравнить числители. Если числители дробей равны, то и дроби равны. Если числители дробей неравны, то та дробь больше, у которой числитель больше.*

П р и м е р 2. Сравнить дроби $\frac{3}{10} * \frac{7}{8}$.

Р е ш е н и е. Знаменатели дробей различны, поэтому, прежде чем сравнить дроби, приведем их к общему знаменателю. Найдем НОК(10, 8). Каноническое разложение чисел $10 = 2 \cdot 5$, $8 = 2^3$, следовательно, НОК(10, 8) $= 2^3 \cdot 5 = 40$. Дополнительный множитель к первой дроби 4, ко второй – 5. Проведем преобразование дробей $\frac{3 \cdot 4}{10 \cdot 4} = \frac{12}{40} * \frac{7 \cdot 5}{8 \cdot 5} = \frac{35}{40}$. Вторая дробь имеет числитель больше, а именно 35 > 12.

Поэтому можно записать $\frac{3}{10} < \frac{7}{8}$.

Множество положительных рациональных чисел. Множество всех классов эквивалентных дробей составляет множество рациональных чисел.

Обозначается множество рациональных чисел Q.

$$Q = \{x \mid x = \frac{p}{q}, p \in N_0, q \in N\}$$

С р а в н е н и е р а ц и о н а л ь н ы х ч и с е л. Чтобы сравнить два рациональных числа, достаточно сравнить формы их записи.

Покажем, что результат сравнения рациональных чисел не зависит от их формы записи.

Пусть a, b – положительные рациональные числа и пусть число a выражается дробями $\frac{m}{n} \approx \frac{m_1}{n_1}$, число b – дробями $\frac{k}{l} \approx \frac{k_1}{l_1}$, а также известно, что $a < b$, т.е. $\frac{m}{n} < \frac{k}{l}$.

Покажем, что в этом случае $\frac{m_1}{n_1} < \frac{k_1}{l_1}$.

Согласно определению эквивалентных дробей запишем

$$\frac{m}{n} \approx \frac{m_1}{n_1} \Rightarrow mn_1 = nm_1, \frac{k}{l} \approx \frac{k_1}{l_1} \Rightarrow kl_1 = lk_1.$$

Рассмотрим отношение $\frac{m}{n} < \frac{k}{l}$ и преобразуем его:

$$\frac{m}{n} < \frac{k}{l} \Rightarrow ml < nk \,|\cdot l_1 n_1 \Rightarrow m l l_1 n_1 < n k l_1 n_1 \Rightarrow n m_1 l l_1 < l k_1 n n_1 < m_1 l_1 < k_1 n_1 \Rightarrow \frac{m_1}{n_1} < \frac{k_1}{l_1}$$

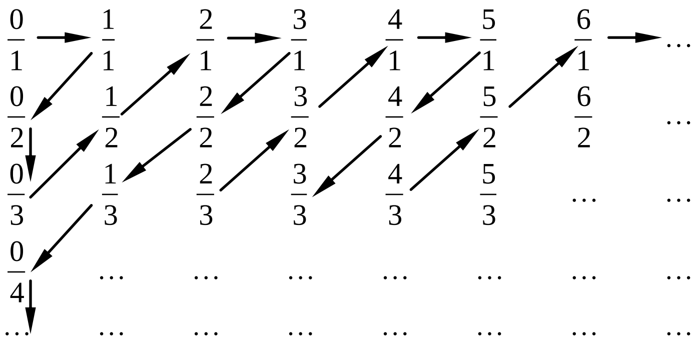
При доказательстве мы воспользовались теоремами равносильности неравенств, монотонностью умножения во множестве N.

Свойства множества Q. Множество рациональных чисел обладает следующими свойствами: счетность, бесконечность, упорядоченность, плотность.

Счетность. Множество называется *счетным*, если можно установить взаимно-однозначное отображение между данным множеством и множеством натуральных чисел.

Если мы найдем правило установления взаимно-однозначного отображения между множествами Q и N, то тем самым докажем свойство счетности множества Q.

Изобразим множество Q.



Будем двигаться по пути, указанному стрелками. Припишем № 1 первому числу $\frac{0}{1}$, встречающемуся по этому пути, № 2 – второму рациональному числу, если оно не равно первому, № 3 – третьему, если оно не равно ни одному из предыдущих и т.д. Так мы занумеруем все рациональные числа натуральными числами, при этом каждое рациональное число будет иметь *точно* один номер и каждое натуральное число будет номером *точно* одного рационального числа.

Следовательно, мы нашли правило установления взаимно-однозначного отображения между множествами Q и N, и тем самым доказали свойство счетности множества Q.

Бесконечность. Множество считается *бесконечным*, если можно установить эквивалентность между данным множеством и заведомо бесконечным множеством. При доказательстве счетности множества рациональных чисел было доказано, что оно эквивалентно множеству натуральных чисел. Множество натуральных чисел бесконечно (согласно теореме Евклида). Следовательно, множество рациональных чисел, эквивалентное множеству натуральных чисел тоже будет бесконечным.

Упорядоченность. Множество считается *упорядоченным*, если между элементами данного множества установлено отношение порядка. Покажем, что между элементами множества рациональных чисел есть отношение порядка, причем строгого.

Дано: R: «$a < b$», $a, b \in Q$.

Доказать: R есть отношение строгого порядка.

Отношение между элементами некоторого множества есть отношение порядка, если оно транзитивно и асимметрично.

Транзитивность $(\forall a,b,c \in Q) a < b, b < c \Rightarrow a < c$.

Пусть $a = \dfrac{m}{n}, b = \dfrac{k}{l}, c = \dfrac{s}{p}$.

Тогда $\left.\begin{array}{l} a < b \Rightarrow \dfrac{m}{n} < \dfrac{k}{l} \\ b < c \Rightarrow \dfrac{k}{l} < \dfrac{s}{p} \end{array}\right| \Rightarrow a < c \Rightarrow \dfrac{m}{n} < \dfrac{s}{p}$.

На основании сравнения дробей имеем

$$\frac{m}{n} < \frac{k}{l} \Rightarrow ml < nk, \frac{k}{l} < \frac{s}{p} \Rightarrow kp < ls .$$

Умножим первое неравенство на p второе – на n на основании теорем равносильности неравенств.

Получим $\left.\begin{array}{l} ml < nk \Rightarrow mlp < nkp \\ kp < ls \Rightarrow kpn < lsn \end{array}\right| \Rightarrow mlp < lsn$ по транзитивности отношения «меньше» во множестве *N*. На основании теорем равносильности неравенств разделим на $l\neq 0$. Получим $mp < sn \Rightarrow \dfrac{m}{n} < \dfrac{s}{p}$ на основании сравнения дробей.

Асимметричность $(\forall a,b,c \in Q)a < b \overline{\Rightarrow} b < a$.

Пусть $a = \dfrac{m}{n}, b = \dfrac{k}{l}$,

Тогда $\left.\begin{array}{l} a < b \Rightarrow \dfrac{m}{n} < \dfrac{k}{l} \\ b < a \Rightarrow \dfrac{k}{l} < \dfrac{m}{n} \end{array}\right| \Rightarrow \dfrac{m}{n} < \dfrac{k}{l} \overline{\Rightarrow} \dfrac{k}{l} < \dfrac{m}{n}$.

На основании правил сравнения дробей имеем

$$\frac{m}{n} < \frac{k}{l} \Rightarrow ml < nk, \frac{k}{l} < \frac{m}{n} \Rightarrow kn < lm.$$

По асимметричности отношения «меньше» во множестве *N* получим $ml < nk \overline{\Rightarrow} nk < ml$. Отсюда, согласно правилам сравнения дробей, можно записать $\dfrac{m}{n} < \dfrac{k}{l} \overline{\Rightarrow} \dfrac{k}{l} < \dfrac{m}{n}$. Что и требовалось доказать.

Плотность. Множество считается *плотным в себе*, если между любыми его элементами всегда найдется элемент этого же множества. Покажем, что множество рациональных чисел плотно в себе, т.к. между любыми двумя рациональными числами всегда есть рациональное число.

Пусть $q, r \in Q$ рациональные числа. Найдем среднее арифметическое этих чисел $\dfrac{q+r}{2}$. Но тогда верно отношение $q < \dfrac{q+r}{2} < r$, следовательно $\dfrac{q+r}{2} \in Q$. Аналогично можно найти среднее арифметическое чисел q и $\dfrac{q+r}{2}$, а также $\dfrac{q+r}{2}$ и r и т.д. Можно сказать, что между двумя рациональными числами всегда есть рациональное число.

Операции во множестве рациональных чисел. С рациональными числами можно выполнять те же операции, что и с целыми неотрицательными, а именно: сложение, вычитание, умножение, деление.

Прежде, чем рассматривать операции с рациональными числами введем несколько замечаний.

Определение. Под дробью *со знаменателем, равным единице*, условились считать целое число, выраженное ее числителем $\frac{a}{1}=a$. Это условие позволяет считать все целые числа рациональными, т.к. всякое целое число можно рассматривать как дробь, знаменатель которой равен единице.

Следствие 1. Всякое число можно выразить в виде дроби, знаменатель которой может быть каким угодно числом, не равным нулю. Так как целое число можно рассматривать как дробь, знаменатель которой равен единице, то $a=\frac{a}{1}\Rightarrow\frac{a}{1}=\frac{an}{1\cdot n}$ по основному свойству дроби.

Отсюда $a=\frac{an}{1\cdot n}=\frac{an}{n}$ по транзитивности отношения равенства.

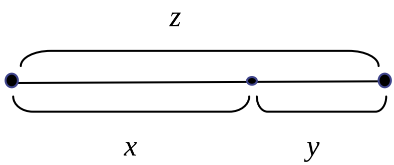
Правило. *Чтобы целое число выразить в виде дроби с данным знаменателем, достаточно целое число умножить на этот знаменатель, полученное значение произведения взять числителем, а знаменателем написать данный знаменатель.*

Следствие 2. Дробь, числитель которой равен знаменателю, равна единице.

На основании основного свойства дроби и транзитивности отношения равенства имеем $\left.\begin{matrix}\frac{1}{1}=\frac{1\cdot n}{1\cdot n}=\frac{n}{n}\\ \frac{1}{1}=1\end{matrix}\right|\Rightarrow\frac{n}{n}=1$. Следовательно, единица содержит n n-х частей единицы. Дробь $\frac{1}{n}$ составляет одну n-ю часть единицы.

Сложение рациональных чисел. Покажем сложение рациональных чисел на примере аддитивности величин.

По свойству аддитивности величин $z = x \oplus y$. Пусть n-я часть отрезка e укладывается в отрезке x m раз, т.е. $m_e(x) = \frac{m}{n}$, в отрезке y p раз, т.е. $m_e(y) = \frac{p}{n}$.



Тогда n-я часть отрезка e укладывается в отрезке z $(m + p)$ раз. Имеем $m_e(z) = m_e(x) + m_e(y) \Rightarrow \frac{m}{n} + \frac{p}{n} = \frac{m+p}{n}$.

Определение 1. *Суммой* двух дробей с равными знаменателями называется дробь с тем же знаменателем и числителем, равным сумме числителей дробей-слагаемых $\frac{m}{n} + \frac{p}{n} = \frac{m+p}{n}$.

Определение 2. Сумма целого числа и дроби называется *смешанным числом* $a + \frac{b}{k} = a\frac{b}{k}$.

Правило перевода смешанного числа в неправильную дробь. *Чтобы смешанное число обратить в неправильную дробь, надо целое число умножить на знаменатель дроби, к полученному значению произведения прибавить числитель; полученный результат записать в числитель искомой дроби, знаменатель оставить прежним*

$$a\frac{b}{k} = a + \frac{b}{k} = \frac{a}{1} + \frac{b}{k} = \frac{ak}{k} + \frac{b}{k} = \frac{ak+b}{k}.$$

Пример 1. Заменить смешанное число $2\frac{3}{5}$ в неправильную дробь.

Решение. Воспользуемся правилом, имеем

$$2\frac{3}{5}=\frac{2\cdot5+3}{5}=\frac{13}{5}.$$

Правило перевода неправильной дроби в смешанное число. *Чтобы неправильную дробь обратить в смешанное или целое число, достаточно числитель разделить на знаменатель; значение частного от этого деления покажет, сколько целых единиц, а остаток – сколько долей единицы содержится в смешанном числе*

$$\frac{ak+b}{k}=\frac{ak}{k}+\frac{b}{k}=\frac{a}{1}+\frac{b}{k}=a+\frac{b}{k}=a\frac{b}{k}.$$

Пример 2. Заменить неправильную дробь $\frac{13}{5}$ смешанным числом.

Решение. Воспользуемся правилом, имеем

$$\frac{13}{5}=\frac{2\cdot5+3}{5}=\frac{2\cdot5}{5}+\frac{3}{5}=2\frac{3}{5}.$$

Алгоритм сложения дробей.

1.Привести дроби к общему знаменателю.

2.Сложить числители.

3.Значение суммы числителей записать в числитель дроби.

4.Записать общий знаменатель.

$\frac{m}{n}+\frac{p}{k}=\frac{mk}{nk}+\frac{pn}{kn}=\frac{mk+pn}{nk}$, при этом $kn=nk$ по коммутативности умножения во множестве N_0.

Свойства сложения во множестве Q. Сложение во множестве Q есть алгебраическая операция, т.к.:

- результат сложения рациональных чисел есть рациональное число $\frac{m}{n}+\frac{p}{k}=\frac{mk+pn}{nk}$;

- нейтральный элемент для операции сложения есть рациональное число $\frac{0}{1}=\frac{0}{k}\in Q$.

Покажем, что сложение во множестве Q существует и единственно, обладает свойствами коммутативности, ассоциативности, монотонности.

Рассмотрим эти свойства.

Теорема. Сложение во множестве Q существует и единственно

Существование. Так как любые две дроби всегда могут быть приведены к общему знаменателю, то сложение любых двух дробей определено. Тогда существование суммы двух дробей вытекает из существования суммы целых неотрицательных чисел, получающейся в числителе результата сложения дробей.

Единственность. Единственность суммы двух дробей вытекает из единственности значения суммы целых неотрицательных чисел, получающегося в числителе результата сложения дробей.

Коммутативность $(\forall a,b \in Q)a+b=b+a$.

Условимся считать дроби приведенными к общему знаменателю.

Имеем $a=\dfrac{m}{k}, b=\dfrac{n}{k}$. Докажем, что верно равенство

$$\frac{m}{k}+\frac{n}{k}=\frac{n}{k}+\frac{m}{k}.$$

Доказательство. Рассмотрим левую и правую части равенств $\dfrac{m}{k}+\dfrac{n}{k}=\dfrac{m+n}{k}$, $\dfrac{n}{k}+\dfrac{m}{k}=\dfrac{n+m}{k}$. Сравним правые части равенств. Имеем дроби с равными знаменателями. По правилу сравнения дробей две дроби с равными знаменателями равны, если равны их числители. Выражения $(m + n)$ и $(n + m)$ равны на основании коммутативности сложения во множестве N_0. Следовательно, верно равенство $\dfrac{m+n}{k}=\dfrac{n+m}{k}$. Тогда по транзитивности отношения равенства левые части тоже равны, т.е. $\dfrac{m}{k}+\dfrac{n}{k}=\dfrac{n}{k}+\dfrac{m}{k}$. Что и требовалось доказать.

Ассоциативность $(\forall a,b,c \in Q)(a+b)+c=a+(b+c)$.

Доказывается аналогично.

Монотонность $(\forall a,b,c \in Q) a > b \Rightarrow a + c > b + c$.

Пусть $a = \frac{m}{k}, b = \frac{n}{k}, c = \frac{p}{k}$.

Докажем $\frac{m}{k} > \frac{n}{k} \Rightarrow \frac{m}{k} + \frac{p}{k} > \frac{n}{k} + \frac{p}{k}$.

Доказательство. По определению суммы дробей запишем $\frac{m}{k} + \frac{p}{k} = \frac{m+p}{k}$, $\frac{n}{k} + \frac{p}{k} = \frac{n+p}{k}$. По признаку неравенства дробей имеем $\frac{m}{k} > \frac{n}{k} \Rightarrow m > n$. По монотонности суммы в N_0 можно записать $m > n \Rightarrow m + p > n + p$. Тогда по признаку неравенства дробей получаем $\frac{m+p}{k} > \frac{n+p}{k}$.

Отсюда по определению суммы дробей

$$\frac{m+p}{k} > \frac{n+p}{k} \Rightarrow \frac{m}{k} + \frac{p}{k} > \frac{n}{k} + \frac{p}{k}.$$

Что и требовалось доказать.

Вычитание рациональных чисел

Определение 1. *Разностью* дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ называется дробь $\frac{x}{y}$, такая, что $\frac{c}{d} + \frac{x}{y} = \frac{a}{b}$.

Определение 2. *Разностью* двух дробей с равными знаменателями называется дробь с тем же знаменателем и числителем, равным разности числителей дробей $\frac{m}{n} - \frac{p}{n} = \frac{m-p}{n}$.

Алгоритм вычитания дробей

1.Привести дроби к общему знаменателю.

2.Вычесть числители.

3.Значение разности числителей записать в числитель дроби.

4.Записать общий знаменатель.

$\frac{m}{n}-\frac{p}{k}=\frac{mk}{nk}-\frac{pn}{kn}=\frac{mk-pn}{nk}$, при этом $nk=kn$ по коммутативности умножения в N_0.

Свойства вычитания во множестве Q. Условимся считать дроби приведенными к общему знаменателю.

Теорема о существовании и единственности разности. Разность двух дробей существует и единственна, если уменьшаемая дробь не меньше вычитаемой

$$\frac{m}{n}\geq\frac{p}{n}\Rightarrow\frac{m}{n}-\frac{p}{n}=\frac{m-p}{n}.$$

Доказательство. По определению 1 разности имеем $\frac{p}{n}+\frac{x}{n}=\frac{m}{n}$. Согласно правилу сложения дробей с равными знаменателями, чтобы найти результат, достаточно сложить числители, получаем $p+x=m$, отсюда по взаимосвязи сложения и вычитания во множестве N_0 запишем $x=m-p$.

На основании теоремы о существовании и единственности значения разности во множестве N_0 получаем следующую зависимость

$$(\forall m,p\in N_0)(m\geq p,\exists!(m-p))\Rightarrow\frac{m}{n}\geq\frac{p}{n}\Rightarrow\frac{m}{n}-\frac{p}{n}=\frac{m-p}{n}.$$

Что и требовалось доказать.

Свойство 1. Прибавление к числу разности двух чисел.

Чтобы к данному дробному числу прибавить разность дробных чисел, достаточно к данному числу прибавить уменьшаемое и вычесть вычитаемое, т.е. верно равенство:

$$\frac{m}{n}+\left(\frac{p}{n}-\frac{k}{n}\right)=\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{n}\right)-\frac{k}{n}.$$

Доказательство. Чтобы получить выражение $\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{n}\right)-\frac{k}{n}$ преобразуем выражение $\frac{m}{n}+\left(\frac{p}{n}-\frac{k}{n}\right)$. При этом воспользуемся следующими положениями:

- определением вычитания дробей;
- определением сложения дробей;

- свойствами разности во множестве N_0.

$$\frac{m}{n}+\left(\frac{p}{n}-\frac{k}{n}\right)=\frac{m}{n}+\frac{p-k}{n}=\frac{m+(p-k)}{n}=\frac{(m+p)-k}{n}=\frac{m+p}{n}-\frac{k}{n}=\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{n}\right)-\frac{k}{n}$$

Мы получили искомое выражение.

Свойство 2. Вычитание из числа разности

Чтобы из данного дробного числа вычесть разность дробных чисел, достаточно из данного числа вычесть уменьшаемое и к результату прибавить вычитаемое, т.е. верно равенство:

$$\frac{m}{n}-\left(\frac{p}{n}-\frac{k}{n}\right)=\left(\frac{m}{n}-\frac{p}{n}\right)+\frac{k}{n}.$$

Свойство 3. Вычитание из числа суммы.

Чтобы из данного дробного числа вычесть сумму дробных чисел, достаточно из данного числа вычесть из него каждое слагаемое, т.е. верно равенство: $\frac{m}{n}-\left(\frac{p}{n}+\frac{k}{n}\right)=\left(\frac{m}{n}-\frac{p}{n}\right)-\frac{k}{n}$.

Свойства 2 и 3 доказываются аналогично свойству 1.

***Умножение во множестве Q*.**

Определение 1. *Произведением* дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ называется дробь $\frac{x}{y}$ такая, что $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{x}{y}$.

Определение 2. *Произведением* двух дробных чисел называется дробь, числитель которой равен произведению числителей перемножаемых дробей, а знаменатель – произведению знаменателей этих дробей $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$.

Алгоритм умножения дробей

1.Найти значение произведения числителей.

2.Найти значение произведения знаменателей.

3.Значение произведения числителей записать в числитель дроби.

4.Значение произведения знаменателей записать в знаменатель дроби $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$.

Свойства умножения во множестве Q. Умножение дробей является алгебраической операцией на множестве Q, т.к.:

- по определению операции умножения во множестве Q результат умножения двух рациональных чисел есть число рациональное $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$;

- для умножения рациональных чисел во множестве Q есть нейтральный элемент – дробь $\frac{1}{1}$, т.е. имеем $\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1} = \frac{a \cdot 1}{b \cdot 1} = \frac{a}{b}$;

- для умножения рациональных чисел во множестве Q есть поглощающий элемент – дробь $\frac{0}{1}$, а именно: $\frac{a}{b} \cdot \frac{0}{1} = \frac{a \cdot 0}{b \cdot 1} = \frac{0}{b} = 0$.

Чтобы рассмотреть свойства операции умножения во множестве рациональных чисел введем следующие правила.

Правило 1. *Произведение двух натуральных чисел есть частный случай произведения дробей*.

Любое натуральное число можно записать в виде обыкновенной дроби со знаменателем, равным единице. Воспользуемся правилом умножения дробей.

$$a \cdot b = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} = \frac{a \cdot b}{1} = a \cdot b.$$

Правило 2. *Чтобы умножить дробь на целое число, достаточно числитель дроби умножить на это число, сохраняя тот же знаменатель*, т.е. можно записать $\frac{a}{b} \cdot k = \frac{a \cdot k}{b}$.

По правилу 1 и определению умножения дробей имеем следующее преобразование $\frac{a}{b} \cdot k = \frac{a}{b} \cdot \frac{k}{1} = \frac{a \cdot k}{b \cdot 1} = \frac{a \cdot k}{b}$.

Правило 3. *Чтобы умножить целое число на дробь, достаточно это число умножить на числитель дроби, сохраняя тот же знаменатель*, т.е. можно записать $k \cdot \frac{a}{b} = \frac{k \cdot a}{b}$.

Показывается аналогично.

Часто правило 3 рассматривают, как правило нахождения части от числа.

Правило 4. *Чтобы найти часть от числа достаточно данное число умножить на числитель дроби и разделить на знаменатель*. Символически записывается так

$$k \cdot \frac{a}{b} = (k \cdot a) : b = \frac{k \cdot a}{b}.$$

Правило 5. *Чтобы умножить смешанные числа, достаточно обратить их в неправильные дроби и произвести умножение по правилу умножения дробей.*

Преобразуем смешанные числа в неправильные дроби и воспользуемся правилом умножения дробей. Получим равенство $a\frac{b}{k} \cdot c\frac{m}{n} = \frac{ak+b}{k} \cdot \frac{cn+m}{n} = \frac{(ak+b)\cdot(cn+m)}{kn}$.

Правило 6. *Чтобы умножить смешанное число на целое, достаточно*:

- *обратить его в неправильную дробь и произвести умножение по правилу умножения дроби на целое число*. Символически это записывается так:

$$a\frac{b}{k} \cdot c = \frac{ak+b}{k} \cdot c = \frac{(ak+b)\cdot c}{k} = \frac{akc+bc}{k}.$$

- *целую часть умножить на целое число, дробную – на целое число и полученные значения произведений сложить*. Покажем символически $a\frac{b}{k} \cdot c = \left(a + \frac{b}{k}\right) \cdot c = a \cdot c + \frac{b \cdot c}{k} = \frac{ack + bc}{k}$.

***Свойства операции умножения во множестве Q*.**

Теорема. Умножение во множестве рациональных чисел существует и единственно.

Существование. Существование произведения двух дробей вытекает из существования произведений целых неотрицательных чисел, получающихся в числителе и знаменателе результата умножения дробей.

Единственность. Единственность произведения двух дробей вытекает из единственности значения произведения целых неотрицательных чисел, получающихся в числителе и знаменателе результата умножения дробей.

Коммутативность. Для любых чисел из множества Q верно равенство: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}$.

Доказательство. Преобразуем правую и левую части равенства, используя следующие теоретические положения:

- определение умножения во множестве Q;
- коммутативность умножения во множестве N;
- условие равенства дробей.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}\\ \frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}=\frac{ca}{db}\end{array}\right|\Rightarrow\left|\begin{array}{l}ac=ca\\ bd=db\end{array}\right|\Rightarrow\frac{ac}{bd}=\frac{ca}{db}\Rightarrow\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}.$$

Ассоциативность. Для любых чисел из множества Q верно равенство: $\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{m}{n}=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{m}{n}\right)$.

Дистрибутивность умножения относительно сложения и вычитания. Для любых чисел из множества Q верны равенства:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{m}{n}=\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{n}+\frac{c}{d}\cdot\frac{m}{n},\quad \left(\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{m}{n}=\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{n}-\frac{c}{d}\cdot\frac{m}{n}.$$

Свойства ассоциативности и дистрибутивности доказываются аналогично свойству коммутативности умножения дробей.

Монотонность $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{n}>\frac{c}{d}\cdot\frac{m}{n}$.

Доказательство. По условию сравнения дробей имеем $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}\Rightarrow ad>bc$. На основании монотонности умножения во множестве N умножим обе части неравенства на mn, получим

$ad > bc \,|\cdot mn \Rightarrow (ad)\cdot(mn) > (bc)\cdot(mn)$. По ассоциативности умножения во множестве *N* преобразуем полученную запись, имеем $(ad)\cdot(mn) > (bc)\cdot(mn) \Rightarrow (am)\cdot(dn) > (cm)\cdot(bn)$. Тогда по условию сравнения и определения умножения дробей получим $(am)\cdot(dn) > (cm)\cdot(bn) \Rightarrow \frac{am}{bn} > \frac{cm}{dn} \Rightarrow \frac{a}{b}\cdot\frac{m}{n} > \frac{c}{d}\cdot\frac{m}{n}$. Что и требовалось доказать.

Деление рациональных чисел.

Определение 1. *Частным* дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ называется дробь $\frac{x}{y}$, такая, что $\frac{c}{d}\cdot\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$.

Теорема. Деление во множестве *Q* рассматривается также как и во множестве *N*, а именно как действие обратное умножению.

Определение 2. Две дроби называются *взаимно обратными*, если числитель первой дроби равен знаменателю второй и обратно.

Обратная дробь получается на основании существования нейтрального элемента для операции умножения во множестве *Q*, т.е. $\frac{c}{d}\cdot\frac{d}{c} = 1$.

Следовательно, деление дроби $\frac{a}{b}$ на дробь $\frac{c}{d}$ равносильно умножению этой дроби на дробь, обратную делителю.

На основании выше сказанного можно записать

$$\frac{c}{d} : \frac{a}{b} = \frac{c}{d}\cdot\frac{b}{a} = \frac{x}{y}.$$

Определение 3. *Частным* двух дробных чисел называется дробь, числитель которой равен произведению числителя первой дроби на знаменатель второй, а знаменатель – произведению знаменателя первой дроби на числитель второй

$$\frac{c}{d} : \frac{a}{b} = \frac{c\cdot b}{d\cdot a}.$$

Алгоритм деления дробей

1.Найти значение произведения числителя первой дроби на знаменатель второй.

2.Найти значение произведения знаменателя первой дроби на числитель второй.

3.Значение первого произведения записать в числитель дроби.

4.Значение второго произведения записать в знаменатель дроби, т.е. имеем следующую запись $\frac{c}{d}:\frac{a}{b}=\frac{c\cdot b}{d\cdot a}$.

Чтобы рассмотреть свойства деления во множестве рациональных чисел введем следующие правила.

Правило 1. *Деление натуральных чисел является частным случаем деления обыкновенных дробей*, т.е. выполняется условие: $(\forall a,b\in N)a:b\Rightarrow\frac{a}{1}:\frac{b}{1}=\frac{a}{1}\cdot\frac{1}{b}=\frac{a}{b}$.

Правило 2. *Чтобы разделить дробь на целое число, достаточно умножить ее знаменатель на это целое число*

Покажем символическое преобразование записанного правила. воспользовавшись следующими теоретическими положениями:

- любое целое число можно записать со знаменателем 1;
- теоремой о делении дробей;
- правилом умножения дробей.

$$\frac{a}{b}:c=\frac{a}{b}:\frac{c}{1}=\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{c}=\frac{a\cdot 1}{b\cdot c}=\frac{a}{bc}$$

Правило 3. *Чтобы разделить целое число на дробь, достаточно это целое число умножить на знаменатель, а полученное произведение разделить на числитель делителя*. Аналитически правило можно записать в виде равенства:

$$c:\frac{a}{b}=\frac{c}{1}:\frac{a}{b}=\frac{c}{1}\cdot\frac{b}{a}=\frac{c\cdot b}{1\cdot a}=\frac{cb}{a}.$$

Теоретически данное правило обосновывается теми же положениями, что и правило 2.

Примечание. Часто данное свойство рассматривают, как правило нахождения числа по его части.

Правило 4. *Чтобы найти число по его части, достаточно данное число разделить на дробь, т.е. умножить на знаменатель дроби и разделить на числитель*. Символически это записывается следующим равенством: $c:\frac{a}{b}=(c\cdot b):a=\frac{c\cdot b}{a}$.

Правило 5. *Чтобы разделить смешанные числа, достаточно обратить их в неправильные дроби и произвести деление получившихся дробей по общему правилу деления дробей*. Аналитически правило записывается в виде равенства:

$$c\frac{m}{n}:k\frac{a}{b}=\frac{cn+m}{n}:\frac{kb+a}{b}=\frac{cn+m}{n}\cdot\frac{b}{kb+a}=\frac{(cn+m)\cdot b}{n\cdot(kb+a)}.$$

***Свойства деления во множестве Q*.**

Свойство 1. Деление дробей дистрибутивно справа относительно сложения и вычитания.

Данное свойство можно сформулировать в виде правила 1.

Правило 1. *Чтобы разделить сумму (разность) двух чисел на какое-нибудь число, достаточно разделить на это число каждое слагаемое (уменьшаемое и вычитаемое), а затем полученные результаты сложить (вычесть)*

$$\left(\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}\right):\frac{m}{n}=\frac{a}{b}:\frac{m}{n}\pm\frac{c}{d}:\frac{m}{n}.$$

Свойство 2. От перемены порядка действий умножения и деления результат не меняется.

Справедливы равенства:

1. $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}:\frac{m}{n}=\frac{a}{b}:\frac{m}{n}\cdot\frac{c}{d}$; 2. $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}:\frac{m}{n}=\frac{a}{b}:\frac{m}{n}:\frac{c}{d}$.

Свойство 3. Данное свойство показывает взаимосвязь умножения и деления дробей, которую удобно сформулировать в виде трех правил.

Правило 2. *Чтобы число умножить на частное, достаточно это число умножить на делимое и полученное произведение разделить на делитель* $\frac{m}{n}\cdot\left(\frac{a}{b}:\frac{c}{d}\right)=\left(\frac{m}{n}\cdot\frac{a}{b}\right):\frac{c}{d}$.

Для доказательства равенства покажем преобразование левой части. Воспользуемся следующими теоретическими положениями:

- теоремой о делении дробей;
- правилами деления и умножения дробей.

$$\frac{m}{n}\cdot\left(\frac{a}{b}:\frac{c}{d}\right)=\frac{m}{n}\cdot\left(\frac{ad}{bc}\right)=\frac{m(ad)}{n(bc)}=\frac{(ma)d}{(nb)c}=\left(\frac{ma}{nb}\right):\frac{c}{d}=\left(\frac{m}{n}\cdot\frac{a}{b}\right):\frac{c}{d}.$$

Правило 2. *Чтобы число разделить на произведение двух множителей, достаточно это число разделить на первый множитель, полученное частное разделить на второй множитель* $\frac{m}{n}:\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)=\left(\frac{m}{n}:\frac{a}{b}\right):\frac{c}{d}$.

Правило 3. *Чтобы число разделить на частное, достаточно это число разделить на делимое, полученное частное умножить на делитель* $\frac{m}{n}:\left(\frac{a}{b}:\frac{c}{d}\right)=\left(\frac{m}{n}:\frac{a}{b}\right)\cdot\frac{c}{d}$.

Равенства в правилах 2 и 3 доказываются аналогично правилу 1.

Задание. Найти значение выражения:

$$\left(1\frac{15}{26}+\frac{1}{39}-\frac{7}{156}\right):\left(20\frac{1}{4}:26\right).$$

Решение. Чтобы найти значение выражения, установим порядок действий. Выполняем задания в первой скобке, затем во второй, полученные результаты позволят выполнить последнее действие.

1.Найдем общий знаменатель чисел НОК(26, 39, 156). Имеем следующее каноническое разложение чисел: $26=2\cdot13$, $39=3\cdot13$, $156=2^2\cdot3\cdot13$. Сравнивая данные разложения, видим, что число 156 делится на каждое из данных чисел, следовательно, НОК(26, 39, 156)=156. Дополнительные множители к первой дроби – 6, ко второй – 4, к третьей – 1. Получаем запись:

$$1\frac{15}{26}+\frac{1}{39}-\frac{7}{156}=1\frac{15\cdot6+1\cdot4-7}{156}=1\frac{90+4-7}{156}1\frac{87}{156}.$$

2.Для нахождения значения выражения нужно перевести смешанное число в неправильную дробь и воспользоваться правилом деления дроби на целое число. Получаем запись:

$$20\frac{1}{4}:26=\frac{81}{4\cdot 26}=\frac{81}{104}.$$

3.Для нахождения значения выражения нужно перевести смешанное число в неправильную дробь и воспользоваться правилом деления дроби на дробь. Получаем запись:

$$1\frac{87}{156}:\frac{81}{104}=\frac{243\cdot 104}{156\cdot 81}=2.$$

Десятичные дроби.

Определение 1. *Десятичной* дробью называется обыкновенная дробь со знаменателем, равным степени десяти, записанная в десятичной позиционной системе счисления.

По аналогии с записью натурального числа в 10-тичной системе счисления можно записать, если $0\le a_i, b_k \le 9$

$$r=\overline{a_k a_{k-1}\cdots a_1 a_0, b_1 b_2\cdots b_s}=$$

$$=a_k 10^k+a_{k-1}10^{k-1}+\cdots+a_0 10^0+\frac{b_1}{10^1}+\frac{b_2}{10^2}+\cdots+\frac{b_s}{10^s}=$$

$$=\frac{a_k 10^{s+k}+a_{k-1}10^{s+k-1}+\cdots+a_0 10^s+b_1 10^{s-1}+\cdots+b_s}{10^s}=\cdot$$

$$=\frac{\overline{a_k a_{k-1}\cdots a_1 a_0 b_1 b_2\cdots b_s}}{10^s}$$

Свойства десятичных дробей. Свойство 1. Из двух соседних цифр в записи десятичной дроби левая цифра имеет разрядную единицу в 10 раз большую, чем правая.

Пусть $\frac{b_i}{10^i}, \frac{b_{i+1}}{10^{i+1}}$ – две соседние цифры в записи числа, тогда $\frac{1}{10^i}=10\cdot\frac{1}{10^{i+1}}$. В записи десятичной дроби выделяется целая часть и дробная. Чтобы отделить целую часть от дробной, в записи числа используют запятую.

По аналогии с нумерацией во множестве целых неотрицательных чисел для десятичных дробей используется понятие разряда. Разряды, учитывая дробную специфику и отношение между соседними разрядами, имеют собственные названия: разряд десятых долей, сотых долей и т.д.

Например, число 3,85 читается «три целых, восемьдесят пять сотых».

Определение 2. Цифры, стоящие после запятой в записи десятичной дроби называются *десятичными знаками*.

Свойство 2. Умножение десятичной дроби на 10^s достигается переносом запятой на s цифр вправо, деление – на s цифр влево, т.е. имеем равенство:

$$r \cdot 10^s = \frac{\overline{a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0 b_1 b_2 \cdots b_s}}{10^s} \cdot 10^s = \overline{a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0 b_1 b_2 \cdots b_s}.$$

В результате получили целое число.

Свойство 3. Приписывание нулей к десятичной дроби и отбрасывание нулей, стоящих в конце десятичной дроби не изменяют ее значения.

Это утверждение равносильно следующему рассуждению:

$$r = \overline{a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0 , b_1 0 \cdots 0} =$$
$$= a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \cdots a_0 10^0 + \frac{b_1}{10^1} + \frac{0}{10^2} + \cdots + \frac{0}{10^s} = \qquad .$$
$$= a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \cdots a_0 10^0 + \frac{b_1}{10^1} + 0 + \cdots 0 = \overline{a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0 , b_1}$$

Свойство 4. Для приведения десятичных дробей к общему знаменателю достаточно приписать к той десятичной дроби, у которой меньше десятичных знаков, несколько нулей, чтобы десятичных знаков стало поровну.

Все десятичные дроби можно считать приведенными к общему знаменателю, поэтому их легко сравнивать по значению, используя критерий равенства обыкновенных дробей с одинаковыми знаменателями.

Пример. Привести дроби к общему знаменателю: 0,35 и 0,315.

Решение. Первая дробь имеет два десятичных знака, вторая – три десятичных знака. Следовательно, дроби должны иметь три десятичных знака. Для приведения дробей к общему знаменателю припишем к первой дроби справа 0. Имеем 0,350 и 0,315. Дроби приведены к общему знаменателю.

Свойство 5. Сравнение десятичных дробей.

Числители десятичных дробей – натуральные числа, записанные в десятичной системе счисления. Для сравнения десятичных дробей используется способ поразрядного сравнения чисел.

Имеем правило. *Из двух десятичных дробей та больше, у которой больше целая часть, если целые части равны, то та дробь больше, у которой больше первый из неравных десятичных знаков.*

Пример. Сравнить десятичные дроби: 2,315 и 1,8; 3,15 и 3,16.

Решение. Дробь 2,315 больше дроби 1,8 т.к. целая часть первой дроби больше целой части второй дроби.

Сравнивая дроби 3,15 и 3,16, видим, что числа, обозначающие целые части у чисел равны, числа в разряде десятых тоже равны, число в разряде сотых долей второго числа больше, чем у первого. Следовательно, число 3,16 больше числа 3,15.

Взаимосвязь между обыкновенными и десятичными дробями. Согласно определения, десятичная дробь есть обыкновенная дробь со знаменателем 10^{γ}. Каждую ли обыкновенную дробь можно записать в виде конечной десятичной дроби? Рассмотрим *критерий перевода обыкновенной дроби в десятичную* дробь.

Теорема. Обыкновенная несократимая дробь $\frac{c}{d}$ тогда и только тогда может быть записана конечной десятичной дробью, когда каноническое разложение числа d имеет вид $d=2^{\alpha}5^{\beta}$.

Достаточность. Пусть дана несократимая дробь $\frac{c}{d}$ и пусть $d=2^{\alpha}5^{\beta}$. Подберем показатель множителей числа d как $\gamma = \max(\alpha, \beta)$. По основному свойству дроби умножим числитель и знаменатель на произведение $2^{\gamma-\alpha}\cdot 5^{\gamma-\beta}$ так, чтобы в знаменателе получилось 10^{γ}.

Получим $\frac{c}{d}=\frac{c\cdot 2^{\gamma-\alpha}\cdot 5^{\gamma-\beta}}{2^{\alpha}\cdot 5^{\beta}\cdot 2^{\gamma-\alpha}\cdot 5^{\gamma-\beta}}=\frac{c\cdot 2^{\gamma-\alpha}\cdot 5^{\gamma-\beta}}{10^{\gamma}}$. Следовательно, дробь $\frac{c}{d}$ может быть записана с γ десятичными знаками.

Необходимость. Пусть $\frac{c}{d}$ – несократимая дробь, т.е. НОД(c, d)=1 и $\frac{c}{d}=\frac{l}{10^{\gamma}}$. По определению эквивалентных дробей запишем $\frac{c}{d}=\frac{l}{10^{\gamma}}\Rightarrow c\cdot 10^{\gamma}=dl$. По определению отношения делимости и признаку делимости произведения имеем $c\cdot 10^{\gamma}=dl\Rightarrow c\cdot 10^{\gamma}\,\vdots\, d\Rightarrow 10^{\gamma}\,\vdots\, d\Rightarrow d=2^{\alpha}\cdot 5^{\beta}$. Что и требовалось доказать.

Данная теорема позволяет сформулировать способы перевода обыкновенной дроби в десятичную дробь.

Правило. *Чтобы перевести обыкновенную дробь в конечную десятичную достаточно поступить следующим способом.*

- *Умножить числитель и знаменатель дроби на* $2^{\alpha}5^{\beta}$ *по основному свойству дроби, так чтобы в знаменателе получилось число* 10^{γ}. *Полученное число есть конечная десятичная дробь, которую можно записать со знаменателем и без знаменателя.*

- *Числитель разделить на знаменатель дроби. Полученное число есть конечная десятичная дробь, которую можно записать без знаменателя.*

Пример. Перевести дробь $\frac{3}{50}$ в десятичную дробь.

Решение. Представим знаменатель дроби в каноническом виде $50=2\cdot 5^2$. В разложении числа 50 только множители числа 10^{γ}, следовательно, для перевода можно воспользоваться сформулированными выше правилами.

1 способ. Чтобы получить в знаменателе 10^{γ}, достаточно число 50 умножить на·число 2, получим число 100. На основа-

нии основного свойства дроби умножим числитель и знаменатель на 2. Получаем $\frac{3}{50}=\frac{3\cdot 2}{50\cdot 2}=\frac{6}{100}=0{,}06$.

2 способ. Разделим числитель на знаменатель: $\frac{3}{50}=3:50=0{,}06$.

Периодические десятичные дроби. Мы рассмотрели ситуацию, когда обыкновенная дробь может быть выражена конечной десятичной дробью. Всегда ли это возможно?

Пусть $\frac{c}{d}$ – несократимая дробь, т.е. НОД(c, d)=1. Рассмотрим случай, когда $d=2^{\alpha}5^{\beta}k$, т.е. НОД(k, 10^{γ})=1.

Пример. Дана дробь $\frac{137}{60}$. Перевести данную дробь в десятичную.

Решение. Представим знаменатель 60 в каноническом виде: $60=2^2\cdot 5^1\cdot 3$. В разложении числа 60, кроме множителей 2 и 5 есть множитель 3, не являющийся делителем числа 10^{γ}. Перевести данную дробь в десятичную конечную первым способом сложно, т.к. трудно подобрать множитель, на который можно умножить знаменатель, чтобы получить 10^{γ}.

Воспользуемся вторым способом, т.е. будем делить числитель на знаменатель. Запишем систему равенств по теореме о делении с остатком.

$137=2\cdot60+17$
$170=2\cdot60+50$
$500=8\cdot60+20$
$200=3\cdot60+20$
$200=3\cdot60+20$ и т.д.

Получаем равенство $\frac{137}{60}\approx 2{,}2833...$. Процесс деления не может закончиться через конечное число шагов. Остатки периодически повторяются, поэтому десятичные знаки периодически тоже будут повторяться. Получается противоречие теореме о переводе обыкновенной дроби в конечную десятичную дробь.

Определение 1. Десятичная бесконечная дробь, у которой группа десятичных знаков периодически повторяется, называется *периодической* десятичной дробью.

Определение 2. Десятичные знаки, которые повторяются, образуют *период*.

Определение 3. Десятичные знаки, стоящие до первого периода, образуют *предпериод*.

Полученную дробь принято записывать так:

$$\frac{137}{60} \approx 2{,}2833... = 2{,}28(3)\,.$$

Читается «Две целых, двадцать восемь до периода, три в периоде».

Таким образом, мы можем сформулировать теорему.

Теорема. Пусть $\frac{c}{d}$ – несократимая дробь, т.е. НОД(c, d) = 1 и пусть $d = 2^{\alpha}5^{\beta}k$, т.е. НОД(10, d) $\neq$ 1 и НОД(k, 10^{γ}) = 1. Тогда данная дробь равна бесконечной периодической дроби. Мы опустим доказательство данной теоремы и рассмотрим ее применение на конкретных примерах.

Выполним следующее задание.

Задание. Перевести в десятичную дробь следующие дроби: $\frac{1}{7}, \frac{1}{54}$.

Решение. Сравним каноническое разложение знаменателей данных дробей и число 10^{γ}.

Число 7 – простое число, НОД(7, 10) = 1. Число $54=2\cdot 3^3$, НОД(54, 10) = 2, НОД(3, 10) = 1.

Воспользовавшись вторым способом, получим $\frac{1}{7} = 0,(142857)$, $\frac{1}{54} = 0{,}0(185)$. Сравнение записей показывает, что иногда период начинается сразу после запятой, а иногда нет.

Определение 4. Периодическую десятичную дробь называют *чистой* периодической дробью, если период начинается сразу после запятой.

Определение 5. Периодическую десятичную дробь называют *смешанной* периодической дробью, если между запятой и периодом есть еще десятичные знаки.

Доказано, что если $\frac{c}{d}$ – несократимая дробь, т.е. НОД(c, d) = 1 и если:

- НОД(10, d) = 1, то дробь $\frac{c}{d}$ обращается в чистую периодическую десятичную дробь;

- $d = 2^{\alpha}5^{\beta}k$, НОД(10, d) $\neq$ 1 и НОД(10, k)=1, то дробь $\frac{c}{d}$ обращается в смешанную периодическую десятичную дробь.

Итак, мы познакомились со способами перевода обыкновенной дроби в десятичную периодическую дробь.

Возможна обратная операция. Рассмотрим каждый случай.

Перевод чистой периодической дроби в обыкновенную. Пусть $r = \overline{0,(b_1b_2\cdots b_n)}$ – чистая периодическая десятичная дробь с периодом из n знаков и пусть $a = \overline{b_1b_2\cdots b_n}$ – натуральное число, записанное цифрами периода.

Умножим r на 10^n. Получаем следующую последовательность преобразований:

$$r\cdot 10^n = a + r \Rightarrow a = r\cdot 10^n - r = r(10^n - 1) \Rightarrow a = r(10^n - 1) \Rightarrow r = \frac{a}{10^n - 1}.$$

Учитывая, что $10^n - 1 = \underbrace{99\ldots9}_{n}$, получаем формулу перевода и правило $r = \frac{a}{10^n - 1} = \frac{a}{\underbrace{99\ldots9}_{n}}$.

Правило 1. *Чтобы чистую периодическую десятичную дробь преобразовать в обыкновенную, следует в числителе записать число, образованное цифрами периода, а в знаменателе – число, записанное одними девятками, с числом девяток, равным длине периода.*

Перевод смешанной периодической дроби в обыкновенную. Пусть $r = \overline{0,b_1b_2\cdots b_n(b_{n+1}b_{n+2}\ldots b_{n+k})}$ – смешанная периодическая десятичная дробь с предпериодом из *n* знаков и периодом из *k* знаков.

Обозначим:

$m = \overline{b_1b_2\cdots b_n}$ – натуральное число, записанное цифрами предпериода,

$a = \overline{b_{n+1}b_{n+2}\ldots b_{n+k}}$.– натуральное число, записанное цифрами периода,

$c = \overline{b_1b_2\cdots b_nb_{n+1}b_{n+2}\ldots b_{n+k}}$ – натуральное число, записанное цифрами до второго периода.

С учетом введенных обозначений запишем $c = m\cdot 10^k + a$.

Умножим *r* на 10^n и воспользуемся предыдущим правилом, имеем $r\cdot 10^n = m + \overline{0,b_{n+1}b_{n+2}\ldots b_{n+k}} \Rightarrow m + \dfrac{a}{10^k-1}$.

Разделим равенство на 10^n.

$$r\cdot 10^n = m + \frac{a}{10^k-1} \Rightarrow r = \frac{m}{10^n} + \frac{a}{10^n(10^k-1)}.$$

Преобразуем полученное равенство.

$$r = \frac{m}{10^n} + \frac{a}{10^n(10^k-1)} = \frac{m(10^k-1)+a}{10^n(10^k-1)} =$$

$$= \frac{m\cdot 10^k - m + a}{10^n(10^k-1)} = \frac{(m\cdot 10^k + a) - m}{10^n(10^k-1)} = \frac{c-m}{10^n(10^k-1)}.$$

Так как $10^k - 1 = \underbrace{99\ldots9}_{k}$ получаем формулу и правило:

$$r = \frac{c-m}{10^n(10^k-1)} = \frac{c-m}{10^n(\underbrace{99\ldots9}_{k}}.$$

П р а в и л о 2. *Чтобы смешанную периодическую десятичную дробь преобразовать в обыкновенную, достаточно в числителе записать разность между числом, образованным цифрами до второго периода и числом в предпериоде, а в знаменателе – число, записанное девятками и нулями, с числом девяток,* *равным длине периода и числом нулей, равным длине предпериода.*

Покажем применение выше сформулированных правил.

Задание. Преобразовать периодические десятичные дроби в обыкновенные дроби: 0,0(185), 0,(142857).

Решение. Дробь 0,0(185) – смешанная периодическая. Воспользуемся правилом 2. $0{,}0(185)=\dfrac{185-0}{9990}=\dfrac{185}{9990}=\dfrac{1}{54}$.

Дробь 0,(142857) – чистая периодическая. Воспользуемся правилом 1. $0{,}(142857)=\dfrac{142857}{999999}=\dfrac{1}{7}$.

Операции с десятичными дробями. С десятичными дробями так же как с другими числами можно выполнять все операции: сложение, вычитание, умножение и деление.

Учитывая, что запись десятичных дробей аналогична записи многозначных целых неотрицательных чисел, все операции с дробями выполняются по известным для данных операций алгоритмам с многозначными числами. Получаем следующие правила.

Правило сложения. *Чтобы сложить две десятичные дроби, достаточно их подписать друг под другом, разряд под разрядом, запятую под запятой, привести к общему знаменателю, приписав к дроби с меньшим числом десятичных знаков столько нулей, сколько их в числе с наибольшим числом десятичных знаков, и сложить как целые неотрицательные числа. В результате поставить запятую под запятой.*

Пример 1. $$\begin{array}{r} {}_{+}25{,}315 \\ \underline{12{,}050} \\ 37{,}365 \end{array}.$$

Правило вычитания. *Чтобы вычесть две десятичные дроби, достаточно их подписать друг под другом, разряд под разрядом, запятую под запятой, привести к общему знаменателю, приписав к дроби с меньшим числом десятичных знаков столько нулей, сколько их в числе с наибольшим числом десятичных знаков, и вычесть как многозначные числа. В результате поставить запятую под запятой.*

Пример 2. $$\begin{array}{r} 25{,}315 \\ -\underline{12{,}050} \\ 13{,}265 \end{array}$$

Правило умножения. *Чтобы умножить две десятичные дроби, достаточно подписать их друг под другом, не обращая внимания на запятые, перемножить их как многозначные числа. В результате отделить столько десятичных знаков, сколько их в множителях вместе.*

Пример 3. $$\begin{array}{r} 12{,}5 \\ \times\underline{0{,}30} \\ 3{,}75 \end{array}$$

Правило деления.

1.*Чтобы разделить десятичную дробь на целое число достаточно разделить на число целую часть десятичной дроби по правилу деления целых чисел, поставить запятую и продолжать делить десятичную часть числа, раздробляя десятичные знаки в более мелкие доли, пока не произойдет деление нацело.*

2.*Чтобы разделить десятичную дробь на десятичную достаточно увеличить делимое и делитель во столько раз, чтобы делитель стал целым числом, а затем произвести деление по правилу деления на целое число.*

Примеры 4. 5.

$$\begin{array}{r|l} -13{,}8 & 6 \\ \cline{2-2} \underline{12} & 2{,}3 \\ -18 & \\ \underline{18} & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -13{,}8 & 0{,}6 \\ \cline{2-2} \underline{12} & 23 \\ -18 & \\ \underline{18} & \\ 0 & \end{array}$$

В примере 5 мы умножили делимое и делитель на 10, перенеся запятую в делителе и в делимом на один знак вправо.

Свойства операций. Учитывая, что данные числа есть дроби, поэтому все свойства операций над дробными числами справедливы.

Проценты. В жизненной практике часто используется специфическая десятичная дробь. Ее называют процентом.

Определение. Одна сотая часть числа называется процентом. Обозначается 1%.

Различают следующие взаимообратные задачи на проценты.

Задача 1. Нахождение процента от числа.

Задача 2. Нахождение числа по проценту.

Задача 3. Нахождение процентного отношения.

Рассмотрим эти задачи на конкретных примерах.

Нахождение процента от числа.

Правило 1. *Чтобы найти несколько процентов от числа, достаточно данное число умножить на число процентов и результат разделить на* 100.

Пример 1. От поселка до города 20 км. 40% этого пути дорога идет лесом. Каков путь лесом?

Так как процент – частный вид дроби, то можно рассматривать эту задачу как задачу на нахождение части от числа, обозначив искомый путь через x, выразив проценты в виде дроби $\frac{40}{100}$. Получаем решение задачи: $x = \frac{20 \cdot 40}{100} = 8(км)$.

Нахождение числа по проценту.

Правило 2. *Чтобы найти число по проценту, достаточно числовое значение процента разделить на число процентов и результат умножить на* 100.

Пример 2. От поселка до города несколько километров. 40% этого пути дорога идет лесом, что составляет 8 км. Каков весь путь?

Данную задачу можно рассматривать как задачу нахождения числа по его части.

Получаем решение задачи: $x = \frac{8}{40} \cdot 100 = 20(км)$.

Нахождение процентного отношения.

Правило 3. *Чтобы найти процентное отношение одного числа к другому, достаточно первое число разделить на второе число и результат умножить на* 100.

Пример 3. От поселка до города 20 километров. 8 км этого пути дорога идет лесом. Какой процент от всего пути составляет путь лесом?

Получаем решение задачи: $x = \frac{8}{20} \cdot 100 = 40\%$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Назовите три дроби, представляющие то же рациональное число, что и дробь:

   а) $\frac{7}{15}$; б) $\frac{3}{2}$; в) $\frac{5}{12}$.

2. Запишите три дроби, равносильные данным:

   а) $\frac{6}{25}$; б) $\frac{72}{108}$; в) $\frac{24}{27}$.

3. Сколько рациональных чисел записано дробями:

   $\frac{1}{2}; \frac{21}{27}; \frac{42}{54}; \frac{8}{16}; \frac{121}{169}; \frac{7}{14}; \frac{24}{48}; \frac{7}{9}; \frac{11}{13}$?

4. Каждую из следующих дробей преобразуйте в равносильную ей несократимую: $\frac{1296}{1928}; \frac{336}{438}; \frac{3630}{5910}.$.

5. Докажите, что если дробь $\frac{a}{b}$ сократима, то дроби $\frac{a-b}{a}$ и $\frac{4a}{2a+3b}$ тоже сократимы.

6. Расположите дроби в порядке возрастания: $\frac{1}{3}; \frac{48}{123}; \frac{56}{149}; \frac{35}{121}$.

7. Запишите ассоциативный закон умножения положительных рациональных чисел и докажите его.

8. Выполните указанные действия:

а) $(1\frac{3}{4}:\frac{2}{3}-1\frac{3}{4}\cdot 1\frac{1}{8}):\frac{7}{12}$; б) $6\frac{3}{5}:1\frac{3}{8}+1\frac{49}{50}\cdot 9\frac{1}{11}$;

в) $35:33\frac{1}{3}+12\frac{2}{9}\cdot 2\frac{2}{5}$; г) $3\frac{1}{2}\cdot(2\frac{1}{2}:5\frac{2}{3}-1\frac{5}{26}:5\frac{2}{3})$.

9. Решите уравнения, используя зависимость между результатом и компонентами действия.

а) $4\frac{1}{4}:(11\frac{1}{3}\cdot x)=\frac{1}{14}$; б) $\frac{11}{12}(\frac{3}{11}+x)=\frac{13}{6}$.

10. Какие из чисел $\frac{5}{14};\frac{12}{38};\frac{7}{25};\frac{121}{365}$ являются решением неравенства $x>\frac{5}{14}$?

11. Запишите по 2 рациональных числа, заключенных между числами $\frac{7}{11}$ и $\frac{8}{121}$; $\frac{8}{13}$ и $\frac{10}{9}$.

12. Известно, что дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{k}$ равносильны, и числитель первой дроби больше числителя второй. Докажите, что в этом случае $n>k$.

13. В бак налили 35 литров воды, наполнив его на $\frac{4}{5}$ объема. Каков объем бака?

14. Турист, выйдя из города, шел 3 часа пешком и $2\frac{1}{2}$ ехал на лошади. Всего он удалился от города на 40 км. В другой раз, выехав из города с теми же скоростями, проехал на лошадях $5\frac{1}{2}$ ч, затем шел пешком в обратную сторону 3 ч и тоже был в 40 км от города. С какой скоростью ехал турист на лошадях?

15. Записать в виде десятичных дробей:

$5\frac{7}{10}$; $4\frac{23}{100}$; $8\frac{4}{1000}$; $6\frac{7}{100}$; $9\frac{9}{10000}$.

16. Какую часть составляют: 1 см от 1 м? 1 г, 5 г, 17 г, 123 г от 1 кг? 1 кг, 5 ц, 35 ц от 1 т? Результат записать в виде десятичной дроби.

17. Представить числа в виде суммы разрядных слагаемых:

5,65; 24,7032; 205,032; 13,005; 80,10.

18. Записать в виде десятичной дроби:

а) 10+5+0,09+0,004; б) 7+0,8+0,04+0,007;

в) $3+\frac{5}{10}+\frac{3}{100}+\frac{4}{1000}$; г) $500+2+\frac{7}{10}+\frac{4}{1000}$.

19. Какие из данных утверждений верны:

- Все обыкновенные дроби можно перевести в десятичные.
- Любую десятичную дробь можно записать в виде обыкновенной дроби.
- Все дроби со знаменателями 25, 50, 125, 8, 4 можно записать в виде десятичных дробей.

20. Переведите обыкновенные дроби в десятичные:

$$\frac{1}{5};\frac{3}{2};\frac{7}{25};\frac{3}{50};\frac{7}{20};\frac{7}{5}.$$

21. Сформулируйте условия, при которых дробь $\frac{m}{n}$ может быть записана в виде:

- конечной десятичной дроби;
- бесконечной чистой периодической десятичной дроби;
- бесконечной смешанной периодической десятичной дроби.

22. Дано множество дробей $\left\{\frac{3}{7},\frac{5}{12},\frac{17}{20},\frac{5}{9},\frac{7}{24},\frac{9}{40},\frac{10}{11},\frac{9}{82},\frac{1}{54}\right\}$.

Выделить подмножества дробей, которые могут быть записаны в виде:

- конечных десятичных дробей;
- чистых периодических дробей;
- смешанных периодических дробей.

23. Какие из дробей можно записать в виде конечной десятичной дроби? $\frac{4}{55};\frac{29}{120};\frac{7}{30};\frac{3}{125};\frac{2}{29};\frac{11}{60};\frac{53}{122}$. Какие из них преобразуются в чистую, какие в смешанную периодическую бесконечную десятичную дробь?

24. Следующие числа представьте в виде несократимых обыкновенных дробей: 0,05; 4,0016; 0,(27); 2,32(16); 6,038(72).

25. Следующие дроби представьте в виде десятичных:

$$\frac{1}{8};\frac{11}{3};\frac{12}{55};17\frac{7}{8};\frac{19}{40};\frac{5}{48};\frac{29}{21}.$$

26. Запишите в виде обыкновенной дроби следующие десятичные дроби: 0,03; 1,00011; 10,0018; 2,(57); 0,(23); 10,(538); 2,14(3); 6,041(27); 0,8(3); 29,041(6); 0,0(518).

27. Установите, истинны ли равенства:

$$\frac{68}{33}=2,(6);\frac{56}{11}=5,(09);\frac{179}{300}=0,(596).$$

28. Выполнить указанные действия:

а) (6,85+5,3):4,5;

б) 15,96:(0,04+2,36) ;

в) 20,16·0,13+14,4+1,068;

г) $\left(\left((0,(06)+\frac{1}{3}\right):0,25\right):(0{,}12(3):0{,}0925)+12{,}5\cdot 0{,}64$;

д) $\dfrac{0{,}8(5)+0{,}17(1)}{0{,}8(5)-0{,}17(1)}+\dfrac{0{,}8(3)+0{,}1(6)}{0{,}8(3)-0{,}1(6)}$;

е) $(0{,}9+0{,}2):1{,}6+16:(0{,}2-0{,}12)-145:800\cdot 0{,}8$;

ё) $(2\frac{2}{3}-1{,}75)+1\frac{5}{6}+\frac{5}{7}\cdot 3{,}5\cdot\frac{5}{6}-1.$

29. Сколько молока в бидоне, если 20% молока составляют 15 л?

30. В пятом классе 30 учеников, из них 40% – девочки. Сколько мальчиков в классе?

31. Контрольную работу писало 30 студентов. Выполнило работу полностью 10 студентов. Каков процент качества?

МНОЖЕСТВО ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Множество положительных действительных чисел. Вернемся к проблеме измерения величин. Под измерением величин понимается отображение области определения величины в некоторое множество чисел. Вспомним ситуации.

При изучении темы о получении целого неотрицательного числа в результате измерения величин (см. Ч. 1) было показано, что, например, длину отрезка можно выразить через единицу измерения в виде целого неотрицательного числа, что выражается равенством $k \in N_0 \Rightarrow m_e(a) = ke$.

В предыдущей теме «Множество рациональных чисел» было показано, что, если длина отрезка не может быть выражена целым неотрицательным числом, то можно ввести новую единицу измерения e_1, такую, что $e_1 = \frac{1}{n}e$, которая укладывается в оставшейся части отрезка целое число раз, что выражается равенством $k\frac{s}{n}e \in Q \Rightarrow m_e(a) = ke + se_1 \Rightarrow ke + \frac{s}{n}e$.

Следовательно, можно выразить длину отрезка через единицу измерения в виде рационального числа.

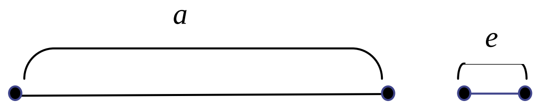
И в том и в другом случае единица измерения или ее часть укладывалась в измеряемой величине целое число раз. Мы получали соизмеримые величины.

В некоторых случаях такая ситуация не может произойти. Например, нельзя точно измерить длину окружности, если в качестве единицы измерения взять длину диаметра этой окружности. Как известно из курса геометрии получается число π=3,14…. В этом случае говорят, что величина *несоизмерима* со своей единицей измерения. Таких ситуаций достаточно много. Например, справедлива теорема: «Диагональ квадрата несоизмерима с его стороной», в результате доказательства которой доказано, что если за единицу измерения длины выбрана сторона квадрата, то длину диагонали этого квадрата нельзя выразить рациональным числом.

Следовательно, кроме рациональных чисел есть еще другие числа.

Иррациональные числа. Покажем, что результат измерения любого отрезка всегда может быть записан в виде бесконечной десятичной дроби.

Задача. Дано: отрезок a и единичный отрезок e. Определить длину отрезка a.



При решении задачи возможны ситуации: $a < e$; $a \geq e$, что можно записать в виде отношений:

- $a < e \Rightarrow 0 \leq a < e$;
- $a \geq e \Rightarrow (\exists n \in N)\ n \leq a < (n+1)e$.

Назовем натуральное число n (или 0, если $a < e$) *целой частью* длины отрезка a.

Если $a \cong ne$, то длина отрезка a выражается натуральным числом, иначе $a \cong ne + a_1$, где $a_1 < e$. Тогда существует $n_1 \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\}$, такое что $\frac{n_1}{10}e \leq a_1 \leq \frac{n_1+1}{10}e$. Тогда длина отрезка a будет выражена неравенством $(n+\frac{n_1}{10})e \leq ne + a_1 < (n+\frac{n_1+1}{10})e$, что запишем в виде десятичных дробей $(\overline{n,n_1})e \leq a < (\overline{n,n_1}+0{,}1)e$. Продолжая описанный процесс, мы получим, что $(\overline{n,n_1n_2n_3\ldots n_k})e \leq a < (\overline{n,n_1n_2n_3\ldots n_k}+\frac{1}{10^k})e$. Следовательно, длина отрезка a есть некоторая десятичная бесконечная дробь $\overline{n,n_1n_2\ldots n_k}\ldots$. Если отбросить все цифры этой дроби, начиная с некоторой, то получим число $\overline{n,n_1n_2\ldots n_k}$, меньшее длины измеряемого отрезка, если же увеличить в полученном числе последний разряд на 1, то получим число, которое больше длины данного отрезка.

Можно сказать, что для любого k мера отрезка a может быть выражена десятичной дробью $\overline{n,n_1n_2\dots n_k}\dots$, что можно записать в виде неравенства

$$\overline{n,n_1n_2n_3\dots n_k} \le m_e(a) < \overline{n,n_1n_2n_3\dots n_k} + \frac{1}{10^k}.$$

Таким образом, мы поставили в соответствие каждому отрезку бесконечную десятичную дробь и, наоборот, для каждой десятичной дроби существует отрезок, длина которого выражается этой дробью. Среди этих дробей есть конечные и бесконечные десятичные дроби.

Определение 1. Число, выраженное бесконечной десятичной непериодической дробью, называется *иррациональным* числом, например, число π=3,14….

Определение 2. Число, выраженное конечной или бесконечной десятичной дробью, называется *действительным* числом.

Для каждого положительного действительного числа x можно указать его приближенные значения.

Приближенные значения по недостатку с точностью до $\frac{1}{10^k}$ получатся, если оставить целую часть числа и первые k цифр после запятой, а все остальные цифры в записи числа отбросить. Обозначается $x_k = \overline{n,n_1n_2n_3\dots n_k}$.

Прибавив к этому числу $\frac{1}{10^k}$, получим приближенное значение числа по избытку.

Обозначается $x_k^/ = \overline{n,n_1n_2n_3\dots n_k} + \frac{1}{10^k}$. Учитывая выше сказанное, можно записать, что для любого числа x верно неравенство $x_k < x < x_k^/$.

Например. Дано число x = 4,7128356…. Найти значение данного числа по недостатку и по избытку с точность до тысячных долей.

По правилу оставим целую часть числа и первые 3 цифры после запятой, а все остальные цифры в записи числа отбросим.

Получим число по недостатку $x_k = 4{,}712$. Прибавив к этому числу $\frac{1}{10^3}$, получим приближенное значение числа по избытку, т.е. $x_k^{/} = 4{,}713$. Следовательно: $4{,}712 < x < 4{,}713$.

Определение. Обозначим множество бесконечных десятичных дробей, отличных от 0,000…0 и не заканчивающихся последовательностью девяток через R, и назовем его множеством *действительных* чисел. Множество действительных чисел есть объединение множества рациональных и иррациональных чисел.

Свойства множества действительных чисел. Покажем, что множество действительных чисел обладает свойствами: упорядоченностью, непрерывностью, несчетностью, равномощностью множеству всех точек луча.

Рассмотрим вышеназванные свойства.

Упорядоченность. Пусть (x, y $\in$ R) и пусть $x_k = m, m_1 m_2 \ldots m_k \ldots$, $y_k = n, n_1 n_2 \ldots n_k \ldots$. Сравнить числа x и y.

Числа x и y – десятичные дроби, поэтому воспользуемся правилами поразрядного сравнения чисел.

1.Если целая часть первого числа меньше целой части второго числа, то первое число меньше второго, т.е. выполняется отношение $m < n \Rightarrow x < y$.

2.Может быть такая ситуация: целые части равны, десятичные знаки на соответствующих местах одинаковы, но какие-то из них не одинаковы, т.е. выполняется совокупность отношений $m = n$, $m_1 = n_1$, и т.д., но найдется k такое, что $m_k < n_k$. Тогда $x < y$.

В этом случае при $s \geq k$ возникает ситуация $x_s^{/} \leq y_s$. Следовательно, $x < y$ тогда и только тогда, когда найдется такое s, что выполняется неравенство $x_s^{/} \leq y_s$. В этом случае говорят, что во множестве R определено отношение строгого порядка, т.к. отношение «меньше» транзитивно и асимметрично. Значит данное множество упорядочено.

Непрерывность. Множество R обладает свойством непрерывности, т.е. в нем нет скачков, как в N_0 и нет щелей, как во множестве рациональных чисел.

Справедлива аксиома непрерывности. Если числовое множество X лежит слева от числового множества Y, т.е. $x \le y$ для любых $x \in X$, $y \in Y$, то существует $q \in R$, разделяющее множества X и Y. Следовательно, верно неравенство $x \le q \le y$ для любых $x \in X$ и $y \in Y$. Между двумя действительными числами всегда есть действительное число.

Несчетность. Множество R несчетно, т.е. обладает мощностью *континуума*.

Доказательство этого свойства выходит за рамки данного курса, поэтому покажем его на конкретном примере.

Пример: Дано число x = 4,7128356…. Чтобы выявить число наиболее точно, запишем последовательность следующих неравенств $4 < x < 5$,

$4{,}7 < x < 4{,}8$,

$4{,}71 < x < 4{,}72$,

$4{,}712 < x < 4{,}713$ и т.д.

Чем большее число десятичных знаков мы оставим после запятой, тем точнее мы подходим к самому числу. Искомое число будет пределом системы неравенств.

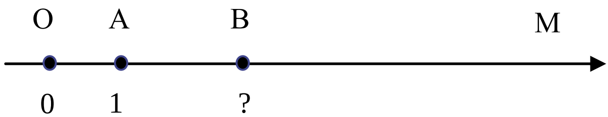
Равномощность множеству всех точек луча. Покажем, что между множеством действительных чисел и множеством точек луча можно установить взаимно-однозначное соответствие.

Множество неотрицательных действительных чисел состоит из всех рациональных и иррациональных неотрицательных чисел. Следовательно, число 5 можно назвать и натуральным, и рациональным, и действительным. Число $\sqrt{2} \approx 1{,}4142\ldots$ можно назвать иррациональными действительным числом.

Геометрическая интерпретация множества действительных чисел. Как известно, числа используются для описания самых разнообразных ситуаций. В частности, они используются для указания положения точки на луче, прямой или другой линии. Например, общеизвестно выражение «поезд остановился на 55-м километре». Оно означает, что расстояние от станции отправления (она известна заранее) до места остановки поезда (вдоль железной дороги) равно 55 *км*; предполагается, что направление движения поезда также известно заранее.

Подобного рода практические задачи привели к созданию математических понятий «числовой луч», «числовая ось (прямая)».

Пусть [OM) – луч с началом O, *e* – единичный отрезок, A – произвольная точка луча [OM) и *a* – мера отрезка [OA] при указанной единице измерения. Будем называть число *a* координатой точки A.



Достаточно назвать координату точки на луче, чтобы найти эту точку. Указанный способ описания положения точки на луче при помощи чисел в ряде случаев очень удобен: с его помощью многие геометрические задачи сводятся к арифметическим (например, определение расстояния между двумя точками на луче), при помощи чисел можно указать положение движущейся по лучу точки в каждый момент времени его движения.

Очень важно следующее: если известны только неотрицательные рациональные числа (а тем более только натуральные!), то не всякая точка луча имеет координату, а. следовательно, не в любой момент времени положение движущейся точки можно описать указанным способом. Например, если отрезок [OA] равен диагонали квадрата, сторона которого равна отрезку *e*, то точка A не имеет координаты, так как отрезок [OA] не имеет меры во множестве рациональных чисел.

Положение существенно меняется, если рассматривать множество неотрицательных действительных чисел: в этом случае всякий отрезок [OA] имеет меру, и притом только одну при указанной единице измерения *e*, а поэтому всякая точка луча [OM) имеет ровно одну координату.

Верно и следующее утверждение, обратное сформулированному: какое бы неотрицательное действительное число *d* мы ни взяли, существует ровно одна точка на луче [OM), координата которой равна этому числу *d*. Для того чтобы найти эту точку, достаточно построить на луче [OM) точку B так, чтобы длина отрезка [OB] равнялась числу *a*. Таким образом, между множеством неотрицательных действительных чисел и множеством точек на луче [OM) установлено взаимно однозначное соответствие: каждому неотрицательному действительному числу соответствует единственная точка луча [OM), и каждой точке луча [OM) соответствует единственное действительное неотрицательное число.

Луч с выбранной единицей измерения, на котором «откладываются» числа, называется числовым лучом. С помощью числового луча можно сравнивать числа, производить операции над ними. Отметим, что необходимость при помощи чисел указывать положение точки, движущейся в различных направлениях по прямой (или другой линии), привела к дальнейшему расширению числового множества – введению отрицательных чисел.

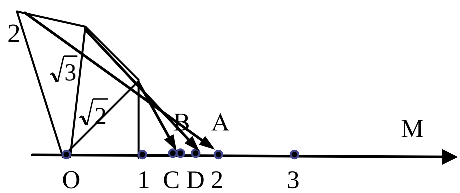
Задание. Показать, что каждой точке, заданной аналитически $A(2)$, $B(1{,}5)$, $C(\sqrt{2})$, $D(\sqrt{3})$ на луче соответствует конкретная единственная точка.

Для построения точки *A* достаточно отложить на числовом луче от начала отсчета два единичных отрезка, для построения точки *B* – отложить от начала отсчета один единичный отрезок и еще его половину. Что касается точек $C(\sqrt{2})$, $D(\sqrt{3})$, учитывая, что $\sqrt{2} \approx 1{,}4142\ldots$, $\sqrt{3} \approx 1{,}7320\ldots$ – иррациональные числа, и их точное числовое значение определить нельзя, подобным способом на числовом луче построить невозможно.

Мы показали, что между множеством *R* и множеством точек луча установлено взаимно-однозначное соответствие. Следовательно, каждому числу соответствует определенный отрезок при данной единице измерения. Вспомним теорему Пифагора и попробуем построить отрезок, длина которого соответствует числу $\sqrt{2}$. По теореме Пифагора длина гипотенузы равнобедренного прямоугольного треугольника со стороной 1 равна

$\sqrt{2}$. Следовательно, чтобы построить отрезок длины $\sqrt{2}$, достаточно построить равнобедренный прямоугольный треугольник, в котором длина катета есть 1.

На числовом луче построим равнобедренный прямоугольный треугольник со стороной, равной единичному отрезку. Тогда отрезок, соответствующий гипотенузе построенного треугольника, будет иметь длину $\sqrt{2}$. Полученный отрезок отложим от начала координат на числовом луче, получим точку *C* с координатой $\sqrt{2}$. Эта точка единственная на основании свойств равных отрезков. Чтобы получить отрезок длины $\sqrt{3}$, вновь воспользуемся теоремой Пифагора для прямоугольного треугольника с длиной сторон 1 и $\sqrt{2}$. Имеем равенство $\sqrt{3} = \sqrt{2+1}$. Воспользуемся построенным прямоугольным треугольником. Полученная в предыдущем случае гипотенуза перейдет в позицию катета. Построим прямой угол и второй катет длиной 1. Тогда гипотенуза построенного треугольника будет иметь длину $\sqrt{3}$. Полученный отрезок отложим от начала координат на числовом луче, получим точку D с координатой $\sqrt{3}$. Данный процесс можно продолжить, откладывая вновь построенный отрезок на числовом луче от начала координат. Получаемая точка по свойству равенства отрезков при одной и той же единице измерения будет единственной.



Таким образом, мы показали, что на числовом луче всегда можно найти единственную точку, соответствующую данному действительному рациональному или иррациональному числу и наоборот. Следовательно, данные множества равномощны.

Мы рассмотрели положительные действительные числа. С помощью положительных действительных чисел можно выразить, например, результат измерения любой скалярной величины: длины, площади, массы и др. Но на практике часто бывает нужно выразить числом не результат измерения величины, а ее изменение, т.е. показать, на сколько изменилась эта величина.

Изменение величины может идти в двух направлениях – она может как увеличиваться, так и уменьшаться, а может остаться неизменной. Чтобы выразить изменение, кроме положительных действительных чисел, нужны иные числа.

Расширим множество положительных действительных чисел, введем число 0 и множество отрицательных действительных чисел.

Поставим в соответствие каждому действительному положительному числу x новое число, которое будем обозначать $(-x)$.

Определение 1. Числа вида $(-x)$, где $x \in R_+$ назовем *отрицательными*, а их множество – *множеством отрицательных чисел* и обозначим его R_-.

Добавим еще число 0.

Определение 2. Объединение множеств положительных действительных чисел, отрицательных действительных чисел и числа 0 называется *множеством действительных чисел* и обозначается R.

Символически записывается в виде равенства:

$$R = R_+ \cup R_- \cup \{0\}.$$

Если некоторая величина имела значение x, а потом приняла значение y, где x и y принадлежат множеству положительных действительных чисел, то при $x < y$ ее изменение выражается положительным числом $(y - x)$, если же $x > y$, то будем говорить, что величина изменилась на отрицательное число $(-(x - y))$. Таким образом, сказать, что величина изменилась на $(-a)$ равносильно тому, чтобы сказать, что она уменьшилась на a.

Как и каждому положительному числу, каждому отрицательному числу соответствует точка на числовой прямой. При этом положительные и отрицательные числа изображаются точками двух противоположных лучей, а число 0 – общим началом этих лучей.

Числа x и $(-x)$, где $x \in R_+$, изображаются точками координатной прямой, симметрично расположенными относительно начала отсчета 0.

Определение 3. Числа x и $(-x)$ называются *противоположными* друг другу, причем считают, что $(-(-x)) = x$.

Определение 4. Расстояние от начала отсчета до точки координатной прямой, изображающей число x, называется *модулем* или *абсолютной величиной* этого числа и обозначается $|x|$.

При этом справедливы следующие положения:

$$|x| = \begin{cases} x, x > 0 \\ -x, x < 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}.$$

Мы рассмотрели все числовые множества, можно записать отношение: $N \subset N_0 \subset Z \subset Q \subset R$.

Операции во множестве действительных чисел. Мы определили ранее, что множество действительных чисел есть объединение множества рациональных чисел и иррациональных.

Во множестве R определена следующая система аксиом.

1.$N \subset R$

2.Операция сложения ставит в соответствие любой паре $(a, b) \in R$ число $(a + b) \in R$. Это число называется значением суммы чисел a и b, а числа – слагаемые. На множестве N данная операция совпадает со сложением натуральных чисел.

3.Операция сложения в R коммутативна, т.е. верно равенство $(\forall (a, b) \in R)\ a + b = b + a$.

4.Операция сложения в R ассоциативна, т.е. верно равенство $(\forall (a, b, c) \in R)\ (a + b) + c = a + (b + c)$.

5.Для любых чисел a и b, принадлежащих множеству R выполняется условие $a + b \neq a$.

6.Если любые числа a и b принадлежат множеству R и $a \neq b$, то в множестве R существует число c, такое что либо $a = b + c$, либо $b = a + c$.

7.Для любого числа a из множества R и любого числа n из множества N существует единственное число b, принадлежащее множеству R, такое, что выполняется равенство $a = \underbrace{b + b + \ldots + b}_{n}$.

Действия с положительными и отрицательными числами. Мы уже знаем, что с рациональными числами можно выполнять сложение, вычитание, умножение и деление. Покажем, что эти операции могут быть выполнены с любыми действительными числами положительными и отрицательными.

Сложение. Пусть некоторое число $x \in R$ сначала изменили на a, а затем на b, причем все изменения проходят в пределах множества R.

Определение. Назовем *значением суммы* чисел a и b действительное число, выражающее результирующее изменение.

Сложение чисел с одинаковыми знаками. Пусть $a, b \in R_+$ и $x \in R$. Тогда при изменении числа x сначала на a, а затем еще на b число x изменяется на $(a+b)$.

Если при этом $a > 0$, $b > 0$, то имеем $(+a) + (+b) = a + b$.

Если же x сначала изменили на $(–a)$, а затем на $(–b)$, то общее изменение получается $(–a) + (–b) = – (a + b)$.

Мы рассмотрели сложение чисел с одинаковыми знаками.

Правило 1. *При сложении двух действительных чисел одного и того же знака получается число того же знака, модуль которого равен значению суммы модулей слагаемых.*

Пример 1. Найти значение выражения: (–94) + (–35).

Решение: (–94) + (–35) = –129.

Сложение чисел с противоположными знаками. Сначала рассмотрим случай, когда слагаемые – противоположные числа.

Если мы изменим число x на a, а затем результат изменим на $(–a)$, то получим снова число x. Следовательно, число x не изменилось, что равносильно записи $a + (–a) = 0$.

Правило 2. *Значение суммы противоположных чисел равно* 0. *Сложение с числом* 0 *не меняет числа*.

Пусть числа a и $(–b)$ – не противоположные. Найдем значение их суммы.

Если $a > b$, то $a + (–b) = a – b$.

Если $a < b$, то $a + (–b)= – (b – a)$.

Правило 3. *При сложении чисел различных знаков получается число, знак которого совпадает со знаком слагаемого, имеющего больший модуль, а модуль равен значению разности большего и меньшего модулей слагаемых*.

Пример 2. Найти значение выражения: 0,785 + (–1,384).

Решение: 0,785 + (–1,384) = –0,599.

Вычитание. Вычитание во множестве действительных чисел определяется как действие, обратное сложению. Так как любое число b из множества действительных чисел имеет противоположное число $(–b)$ принадлежащее этому же множеству, такое, что $b + (–b) = 0$, то вычитание во множестве действительных чисел равносильно сложению с числом $(–b)$.

Верно равенство: $a – b = a + (–b)$. Получаем правило.

Правило 4. *Чтобы из данного числа вычесть другое, надо к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому*.

Пример 3. Найти значение выражения: 34 – (–12).

Решение: 34 – (–12) = 34 + 12 = 46.

Правило 5. *При нахождении значения выражения, содержащего несколько слагаемых, имеющих различные знаки, условились не писать знак* «+»*, а записывать числа с их знаками без скобок*.

Пример 4. Найти значение выражения: 9 + (–7) – (–8) + 4.

Решение: 9 + (–7) – (–8) + 4 = 9 – 7 + 8 + 4 = 14.

Умножение, деление. Теоретическое объяснение данных действий выходит за рамки данного курса, поэтому напомним только правила нахождения результата.

Правило 6. *Значением произведения чисел x и y называется число z, модуль которого равен значению произведения модулей множителей, знак которого положителен, если знаки множителей одинаковы и отрицателен, если знаки различны*.

Правило 7. *Значением частного чисел x и y называется число z, модуль которого равен значению частного модулей делимого и делителя, знак которого положителен, если знаки де-*

лимого и делителя одинаковы и отрицателен, если знаки различны.

Пример 5. Найти значение выражения: $0{,}5:\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{5}{6}$.

Решение: $0{,}5:\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{5}{6}=-\frac{1}{2}:\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{6}=-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot1\cdot6}=-\frac{5}{4}=-1\frac{1}{4}$.

Действия с иррациональными числами. Мы установили, что любое иррациональное число с определенной степенью точности по недостатку и по избытку может быть записано в виде двойного неравенства. Поэтому для получения правил сложения, вычитания, умножения и деления воспользуемся свойствами неравенств, согласно которым неравенства можно складывать, умножать, вычитать и делить.

Сложение, умножение иррациональных чисел. При сложении и умножении действительных чисел мы имеем дело с неравенствами одинакового смысла. Можно записать следующие неравенства:

$$\begin{array}{l} x_k < x < x_k' \\ {}^{+}\underline{y_k < y < y_k'} \\ x_k + y_k < x + y < x_k' + y_k' \end{array} \quad , \quad \begin{array}{l} x_k < x < x_k' \\ {}^{\times}\underline{y_k < y < y_k'} \\ x_k \cdot y_k < x \cdot y < x_k' \cdot y_k' \end{array} .$$

Поэтому получаем следующие правила.

Правило сложения. *Чтобы сложить два действительных числа, взятых с определенной точностью, достаточно сложить их значения по недостатку и по избытку. Первое значение суммы есть значение по недостатку, а второе – по избытку.*

Правило умножения. *Чтобы перемножить два действительных числа взятых с определенной точностью, достаточно перемножить их значения по недостатку и по избытку. Первое значение произведения есть значение по недостатку, а второе – по избытку.*

Действия вычитания и деления являются обратными для действий сложения и вычитания. Поэтому в этом случае имеет место взаимодействие противоположных неравенств.

$$\begin{array}{l} x_k < x < x_k' \\ \underline{{}^{-}y_k < y < y_k'} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_k < x < x_k' \\ \underline{{}^{+}-y_k' > -y > y_k} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_k < x < x_k' \\ \underline{{}^{-}-y_k' < -y < y_k} \\ x_k - y_k' < x - y < x_k' - y_k \end{array}$$

Правило вычитания. *Чтобы вычесть два действительных числа, взятых с определенной точностью, достаточно из значения уменьшаемого по недостатку вычесть значение вычитаемого по избытку. Получим значение разности по недостатку. Для получения значения разности по избытку достаточно из значения уменьшаемого по избытку вычесть значение вычитаемого по недостатку.*

Аналогично выводится формула для нахождения результата деления иррациональных чисел. Имеем правило и формулу.

Правило деления. *Чтобы разделить два действительных числа, взятых с определенной точностью, достаточно значение делимого по недостатку разделить на значение делителя по избытку. Получим значение частного по недостатку. Для получения значения частного по избытку достаточно значение делимого по избытку разделить на значение делителя по недостатку* $\dfrac{x_k}{y_k'} < \dfrac{x}{y} < \dfrac{x_k'}{y_k}$.

Таким образом, мы показали, что и с иррациональными числами можно выполнять арифметические действия.

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Точные и приближенные числа. При счете предметов, при измерении величин и при вычислении мы получаем или точные, или приближенные числа. Рассмотрим случаи получения точных и приближенных чисел.

1.Считая число людей в семье, в квартире, мы можем точно сказать, что семья состоит из 5 человек, что в квартире живут 20 человек. Но если бы мы захотели подсчитать в какой-нибудь определенный момент население большого восьмиэтажного дома, то возможно, что точного числа людей мы и не получили бы. В большом доме всегда может быть изменение числа людей из-за приезда, отъезда, рождения, смерти. Так же и при переписи населения большого города или области, а тем более страны мы получаем только приближенное число жителей, так как приезд, отъезд, рождение, смерть ежеминутно изменяют число жителей.

Таким образом, при счете предметов мы можем получить и точное число – число людей в семье, и приближенное – число людей в области или в столичном городе.

2.Всякую величину можно измерять лишь с известным приближением, которое зависит от точности инструментов, употребляемых при измерении, и отличных качеств лица, производящего измерение: от его опытности, аккуратности, силы зрения и т.п. Допустим, что при измерении расстояния от одного дерева до другого мы получили 7м 2дм 6см. Вторичное измерение того же самого расстояния может дать уже иной результат, например 7м 2дм 4см. Мы не можем утверждать, какое из этих измерений более точное. Если нас удовлетворяет значение измеряемой величины, выраженное в метрах, мы принимаем расстояние между деревьями равным 7м; если хотим иметь результат более точный, берем 7м 2дм, но оба эти результата – числа приближенные. На практике часто не требуется большой точности при измерении; точность полученных результатов измерения ограничивается умышленно. Так, при определении расстояния от одного дерева до другого никто не станет производить измерение с точностью до миллиметра; также никто не взвешивает уголь для топлива с точностью до грамма. Избираемая на практике точность зависит от величины результата измерения и от цели, для которой производится измерение.

3.При вычислении мы получаем точные и приближенные числа в зависимости от чисел, над которыми производим вычисления.

Например.

1.Куплено 5 ручек по 60 рублей за каждую. Сколько денег уплатили за покупку?

Умножая точное число на точное, мы получаем точное число.

2.Сторона участка квадратной формы равна 25м 2дм 3см. Определить длину границы участка.

Если мы выразим длину стороны участка приближенным числом 25м, то и длина границ участка 25м · 4=100м, т.е. произведение приближенного числа на точное будет также приближенное число.

3.Определить площадь участка земли прямоугольной формы, длина которого равна 20м 3дм 2см и ширина 15м 2дм 3см.

Вычисляя площадь прямоугольника в метрах, мы умножаем приближенное число на приближенное число и в результате получаем также приближенное число.

4.При делении точных чисел мы можем получить или точное, или приближенное число, например $113:7=16\frac{1}{7}$; частное – точное число – целое + дробное число. Но можно выразить частное и приближенным числом: $113 : 7 \approx 16$. Знак $\approx$ означает «приближенно равно». Таким образом, при вычислении мы получаем и точные, и приближенные числа.

Округление чисел. Приближенное значение целых чисел. Чтобы легче запомнить или представить себе большие числа, сравнить их между собой, чтобы проще производить расчеты над числами с большим числом цифр, их округляют. Например, трудно запомнить величину диаметра Земли (от полюса до полюса), равную 12713,818км, и в то же время легко запомнить округленное число 12000км или 13000км. Строя диаграммы суточной добычи угля 6836т и 6269т, по масштабу нетрудно отложить округленные числа 6,8 и 6,3. Производя умножение $2{,}972 \cdot 5{,}13$, мы должны уметь прикинуть ожидаемый результат, округляя множители $3 \cdot 5 = 15$.

Особенно часто приходится округлять числа при делении многозначных чисел (прикидка значения частного). Вместо 4584, целого десятичного числа, которое состоит из единиц нескольких разрядов, при округлении берут другое число, заменяя одну, две, три цифры справа налево нулями. При этом получаются приближенные числа меньше данного, или числа с недостатком: 4580, или 4500, или 4000.

Первое из этих чисел меньше данного на 4 единицы ($4584 - 4580 = 4$), второе – на 84 ($4584 - 4500 = 84$) и третье – на 584 ($4584 - 4000 = 584$).

Но можно было бы при округлении заменить непосредственно следующим числом, цифру, обозначающую последнюю сохраняемую цифру, например, взять приближенные числа 4590, 4600 и 5000. При этом получаются приближенные числа больше данного, или приближенные числа с избытком. Первое из этих чисел на 6 единиц ($4590 - 4584 = 6$) больше данного, второе – на 16 единиц ($4600 - 4584 = 16$), третье – на 416 единиц ($5000 - 4584 = 416$) больше данного.

Можно записать следующие неравенства.

с недостатком	число	с избытком
4580	< 4584 <	4590
4500	< 4584 <	4600
4000	< 4584 <	5000

Беря приближенное число с недостатком, мы заменяем все отбрасываемые цифры нулями; беря приближенное число с избытком, мы увеличиваем на единицу последнюю сохраняемую цифру.

Естественно, возникает вопрос: когда брать приближение с недостатком, когда с избытком. Заменяя данное число приближенным, из двух приближенных значений надо выбрать то, которое дает меньшую ошибку. Например, заменяя число 4584 числом 4600, ошибаемся на 16, а заменяя числом 4500, ошибаемся на 84.

Выбор приближенного числа (с недостатком или с избытком) можно производить по следующему правилу: *если за последним оставляемым разрядом следует справа цифра, обозначающая число, меньшее 5, то ее вместе с другими следующими за ней цифрами следует заменить нулями. Если же следует цифра 5 или больше 5, то число оставляемого разряда следует увеличить на единицу, заменяя нулями все отбрасываемые цифры.*

Целые числа округляют до любого разряда, называя последний разряд, который требуется сохранить: округлить число до разряда десятков, или до 2-го разряда, до разряда сотен, или до 3-го разряда, до разряда тысяч, или до 4-го разряда.

Например, округлить число 102548 до 5-го разряда – значит сохранить в приближенном числе 5-й разряд, т.е. разряд десятков тысяч, остальные разряды, стоящие правее, заменить нулями. Приближенное число с недостатком будет 100000. Округление того же числа до разряда тысяч даст 103000.

Задание. Округлить числа 6413 и 6387 до разряда сотен.

Решение. При округлении числа 6413 заменяем нулями разряды десятков и единиц и оставляем без изменения цифру в разряде сотен, т.к. первая из отбрасываемых цифр обозначает число меньшее 5, имеем $6413 \approx 6400$.

При округлении числа 6387 также заменяем нулями разряды десятков и единиц и заменяем число в разряде сотен на непосредственно следующее число, т.к. первая из отбрасываемых цифр обозначает число большее 5, имеем $6387 \approx 6400$.

В точном числе цифра 0 показывает отсутствие единиц в соответствующих разрядах, например точное число 1м = 100см. Нули означают, что в 1*м* содержится только одна сотня сантиметров и ни одного сантиметра больше или меньше. В приближенном же числе нули ставят вместо неизвестных или отброшенных единиц соответствующих разрядов. Например, на собрании присутствовало приблизительно 100 человек. В этом случае два нуля означают, что на собрании могло быть и 107 человек, а могло быть и 98 человек. Нули ставят вместо неизвестных нам единиц в соответствующих разрядах.

Приближенное значение десятичной дроби. Если в изображении десятичной дроби опущены последние десятичные знаки, то получившаяся дробь называется приближенным значением десятичной дроби. Часто мелкие доли единицы – тысячные, десятитысячные и т.д. не имеют никакого практического значения, например 1,2583коп. или 0,1375с. В этом случае берут приближенную величину десятичной дроби с одним или двумя десятичным и знаками, отбрасывая остальные. Десятичная дробь 0,4375 будет иметь приближенную величину 0,4 с недостатком, с точностью до 0,1; 0,43 – с точностью до 0,01 и т.д.

Следует различать термины «десятичные знаки» и «значащие цифры».

Определение 1. *Десятичными знаками* числа называются все его цифры, стоящие после знака дробности.

Определение 2. *Значащими цифрами* числа называются все его цифры, кроме нулей, стоящих левее первой значащей цифры, и нулей, поставленных вместо неизвестных или отброшенных цифр.

Определение 3. В точном числе все цифры значащие.

Определение 4. Нули, стоящие между двумя значащими цифрами, а также стоящие в разряде данной точности считаются значащими.

Например: число 10,204 имеет 5 значащих цифр и 3 десятичных знака; число 0,0037 имеет 2 значащих цифры и 4 десятичных знака.

Часто производят округление «до стольких-то значащих цифр». Например, число 6387 ≈ 6400 округлено до двух значащих цифр. Нули, стоящие вместо отброшенных или неизвестных цифр, не считаются значащими цифрами. Но в числе 100см = 1м три значащих цифры, так как в точном числе нули не поставлены вместо неизвестных или отброшенных цифр.

Округляя число 0,06983 до трех значащих цифр, имеем 0,0698, до двух – 0,070, до одной – 0,07. Нули в конце приближенного значения дроби считаются значащими и не опускаются.

Зачеркивание нулей в конце дробной части приближенного числа изменяет степень точности числа.

По числу десятичных знаков или по числу значащих цифр можно судить о степени точности числа. Например, при измерении отрезка получили 7,2см, а при измерении фасада здания 182м. Второе приближенное число точнее первого, так как в нем три значащих цифры, а в первом только две.

Величина ошибки приближенного числа. Если в целом десятичном числе заменим нулями все цифры, стоящие вправо от какого-нибудь разряда, то ошибка будет меньше одной единицы последнего сохраняемого разряда. Поясним это на числовом примере.

Пример 1. Дано число 159648. Требуется дать его приближенное значение с точностью до единицы 4-го разряда, т.е. сохранить в приближенном числе разряд тысяч.

Приближенное число с недостатком будет 159000. Ошибка меньше 1000, а именно: 159648 – 159000 = 648.

Приближенное число с избытком 160000. Ошибка тоже меньше 1000: 160000 – 159648 = 352.

Мы уже говорили, что из двух приближенных значений надо брать то, которое дает меньшую ошибку. Эта меньшая ошибка всегда будет меньше половины последнего сохраняемого разряда. Следовательно, если мы берем приближенное число с точностью до одной тысячи, то должны взять такое приближенное число, чтобы ошибка была не только меньше одной тысячи, но и меньше половины тысячи, т.е. меньше 500. Таким приближенным числом является число 160000.

Пример 2. Округляя число 8243 до двух значащих цифр, т.е. с точностью до одной сотни, надо выбрать то приближенное число, которое будет отличаться от данного меньше чем на половину последнего сохраняемого разряда, т.е. меньше чем на половину сотни, или меньше чем на 50. Таким приближенным числом будет 8200.

Все сказанное распространяется на десятичные дроби. Если в десятичной дроби отбросить все десятичные знаки, находящиеся в изображении дроби вправо от некоторой цифры, то допущенная ошибка будет меньше счетной единицы последнего оставшегося десятичного разряда.

Пример 3. Если вместо десятичной дроби 9,234565 мы берем приближенное число с недостатком с точностью до одной сотой доли, мы делаем ошибку 9,234565 – 9,23=0,004565, меньше счетной единицы последнего оставшегося разряда, т.е. меньше 0,01. Если же вместо 9,234565 возьмем приближенное значение с избытком, т.е. 9,24, мы делаем ошибку, равную 9,24 – 9,234565=0,005435; величина полученной ошибки также меньше счетной единицы последнего оставшегося разряда, т.е. меньше 0,01.

Из двух приближенных чисел надо взять то, которое дает меньшую ошибку, т.е. взять приближенное число не только с точностью до одной сотой, но до половины от одной сотой, т.е. до 0,005. Это будет число 9,23.

Правило. *Округление с меньшей ошибкой называется основным правилом округления.*

Степень точности приближенных значений дроби зависит от величины счетной единицы последнего оставшегося разряда. Условимся называть приближенными значениями данной десятичной дроби с точностью до $\frac{1}{10^n}$ *каждую из двух десятичных дробей со знаменателем, равным* 10^n*, которые отличаются одна от другой на* $\frac{1}{10^n}$ *и между значениями которых заключается точное значение дроби. Каждое из приближенных значений отличается от точного значения десятичной дроби меньше чем на* $\frac{1}{10^n}$*, причем одно отличается меньше чем на половину* $\frac{1}{10^n}$*, а другое больше, чем на половину* $\frac{1}{10^n}$.

Итак, для нахождения приближенного значения дроби с точностью до $\frac{1}{10^n}$ с недостатком достаточно в изображении дроби опустить все десятичные знаки, следующие за разрядом указанной точности. Заменив последнюю сохраненную цифру, обозначающую число в данном разряде на непосредственно следующее число, получим приближенное значение десятичной дроби с той же степенью точности, но с избытком.

Пример 4. Дана дробь 0,078254; приближенные значения с точностью до $\frac{1}{1000}$ будут 0,078 (с недостатком) и 0,079 – с избытком. Оба приближенных значения отличаются одно от другого на 0,001.Точное значение дроби заключается между двумя приближенными значениями $0{,}078 < 0{,}078254 < 0{,}079$.

Причем одно приближенное значение отличается от данной дроби меньше чем на $\frac{1}{2}$ от $\frac{1}{1000}$, т.е. меньше чем на 0,0005, а второе больше чем на $\frac{1}{2}$ от $\frac{1}{1000}$; 0,078 отличается от данной дроби на 0,000254, а 0,079 на 0,000746.

Для нахождения приближенного значения дроби с точностью до половины единицы какого-либо разряда надо отбросить все цифры за разрядом указанной точности; но если при этом первая из отбрасываемых цифр 5 или больше 5, то последнюю из сохраняемых цифр, обозначающую число в данном разряде надо заменить на непосредственно следующее число.

Например, 0,81 есть приближенное значение дроби 0,805 с точностью до 0,005.

Определение. В приближенных числах различают цифры *верные* (*точные*), *не вполне верные* (*сомнительные*) и *безусловно неверные*.

Пример 5. Несколько учетчиков считают число присутствующих на конференции. Один насчитал 3275 человек, второй – 3264 человека, третий – 3272 человека, четвертый – 3281 человек, пятый – 3277 человек. Сколько же человек наверняка участвовало в конференции?

Каждый из учетчиков насчитал 3 тысячи. Поэтому цифра тысяч – 3 – верная. Точно так же и цифра сотен 2, которую получили все 5 учетчиков, безусловно верная.

Цифра же десятков получилась неодинаковая: у трех учетчиков по 7, а у одного 6 и у другого 8. Поэтому цифра десятков не вполне верная, сомнительная, а цифра единиц, безусловно неверная, так как у всех учетчиков она разная.

Если возьмем число присутствующих на конференции 3270 человек, то можно ручаться только за две первые цифры: за разряды тысяч и сотен.

Правило. *Приближенный результат следует записывать так, чтобы последняя его цифра указывала на его точность; все цифры, кроме последней, должны быть верными и лишь в последней допустима небольшая неточность. В записи приближенного числа лучше избегать нулей, поставленных вместо неизвестных или отброшенных цифр, переходя к более крупным единицам.*

Следовательно, число присутствующих на конференции запишется так: 3,27тыс. человек.

Абсолютная и относительная погрешность приближенного числа. Предположим, что, составляя смету какого-нибудь строительства, мы пришли к числу 15783,956 куб. м строительного материала. Закупая 15784 куб. м, мы берем лишних 0,044 куб. м (разность между точным значением числа и его приближенным значением).

Пусть x – точное значение числа, a – приближенное его значение.

Определение 1. Число $(x – a)$ называют *погрешностью приближения* числа a. Число $|x – a|$ называют *абсолютной погрешностью приближения* a.

Определение 2. Любое число Δa, удовлетворяющее неравенству $\Delta a \geq |x – a|$ называется *границей абсолютной погрешности приближения* a.

В общем виде число x можно записать в следующем виде $x = a \pm \Delta a$ или в виде неравенства $a - \Delta a \leq x \leq a + \Delta a$.

Истинное значение x почти всегда неизвестно, поэтому неизвестны погрешность и абсолютная погрешность. Но всегда можно указать положительное число, заведомо не меньшее, чем абсолютная погрешность. Следовательно, Δa известно.

Определение 3. Всякое число, не большее x, называется *нижней границей* числа и обозначается НГ(x); всякое число не меньшее x называется *верхней границей* числа и обозначается ВГ(x).

Символически это записывается так: НГ(x) ≤ x ≤ ВГ(x).

Учитывая принятое выше обозначение, можно записать: НГ(x) = $a - \Delta a$, ВГ(x) = $a + \Delta a$.

Тогда $x = \frac{НГ(x) + ВГ(x)}{2} \pm \frac{ВГ(x) - НГ(x)}{2}$.

Следовательно, любое приближенное число можно записать либо с помощью границ, либо одним числом с указанием абсолютной погрешности.

Например, предположим, что подсчитана дневная выручка кассы 32528руб. 32коп. Округляя число до целых рублей, имеем приближенное число 32528руб. Абсолютная ошибка равна 32528,32руб. – 32528руб.= 0,32руб.

Во многих случаях абсолютную ошибку определить невозможно, так как практически не всегда возможно получить точное значение числа. Например, мы можем ручаться за то, что ошибка при взвешивании не больше 0,5г, в зависимости от точности весов, но точного веса предмета дать не можем. Также при измерении расстояния мы не можем получить точного числа, но ручаемся за то, что абсолютная величина ошибки не превосходит, допустим, 0,5см или 0,5дм в зависимости от точности измерения. В таких случаях указанные ошибки (0,5г, 0,5см, 0,5дм) называются предельными абсолютными ошибками.

В дальнейшем будем говорить «абсолютная» ошибка или погрешность.

Замечание. Абсолютная погрешность при измерении выражается именованным числом в тех же единицах, каким и произведено измерение.

Зная величину абсолютной ошибки при нескольких различных измерениях, мы еще не можем утверждать, какое измерение произведено точнее.

Например, абсолютные ошибки при двух взвешиваниях получены 0,5г и 50г. Чтобы судить о точности взвешивания, надо указать, какой груз взвешивался.

Пусть 0,5г будет абсолютная ошибка при взвешивании 30г, а 50г при взвешивании 5500г. Ошибка первого взвешивания составляет $\frac{5}{300}=\frac{1}{60}$ веса, а ошибка второго взвешивания составляет $\frac{50}{5500}=\frac{1}{110}$ веса. Несмотря на то, что абсолютная величина первой ошибки в 100 раз меньше, второе измерение произведено почти в 2 раза точнее.

Ошибка, выраженная отношением абсолютной ошибки к результату измерения, характеризует качество измерения.

Определение 4. Отношение абсолютной погрешности к точному значению величины называется *относительной погрешностью*. Так как истинная величина почти никогда неизвестна, то за относительную погрешность принимают отношение абсолютной погрешности к результату измерения.

Относительную погрешность выражают в процентах.

Символически это записывается следующей формулой:

$$\left|\frac{x-a}{a}\right| \leq \frac{\Delta a}{|a|} .$$

Относительная ошибка (погрешность) есть всегда число отвлеченное.

Так как относительную погрешность выражают в процентах, то можно записать: $\left|\frac{x-a}{a}\right| \cdot 100 \leq \frac{\Delta a}{|a|} \cdot 100$.

По последней цифре приближенного числа можно судить об абсолютной погрешности числа.

Пример 1. Высота окна $x \approx 175$см. Ошибка при измерении могла быть ±0,5см, т.е. истинная высота окна заключена между числом 174,5см и175,5см, или $174{,}5 < x < 175{,}5$.

Часто абсолютная погрешность числа пишется в скобках справа от приближенного числа. Например: $x \approx 54{,}6$т(±0,2т) показывает, что истинная масса на 0,2т больше или меньше указанной, т.е. $54{,}4 < x < 54{,}8$. Относительная погрешность числа равна: $\frac{0{,}2}{54{,}6}=\frac{1}{273} \approx 0{,}4\%$.

Пометка на весах 5(±0,1) кг показывает, что весы допускают ошибку в 0,1%, т.е. $\frac{5000 \cdot 0{,}1}{100} = 5$ г в сторону увеличения или уменьшения веса.

Зная относительную погрешность числа, можно найти абсолютную погрешность.

Пример 2. Ширина тротуара 154см измерена с относительной погрешностью в 0,3%. Найти абсолютную погрешность измерения.

Решение: $\frac{154 \cdot 0{,}3}{100} = 0{,}462 \approx 0{,}5\,(\text{см})$.

Замечание. Нельзя произвольно повышать точность приближенного значения числа. Поэтому округление не должно повышать точность. Отсюда:

- нижняя граница (НГ) округляется только с недостатком;
- верхняя граница (ВГ) округляется только с избытком;
- погрешность округления прибавляется к границе абсолютной погрешности.

Действия над приближенными числами. В технических расчетах большей частью приходится иметь дело с приближенными величинами. Для технических целей достаточными являются измерения с 3-4 верными знаками, что соответствует относительной погрешности в 0,1%, а в практических расчетах достаточная точность получается при исходных величинах с 2-3 верными знаками. Значение погрешности результата вычисления освобождает нас от лишних вычислений.

Пример 1. Требуется определить массу 7512 заклепок в данной железной конструкции. Число заклепок известно точно. Масса каждой заклепки 0,085кг (с абсолютной погрешностью до 0,001кг), 7512 заклепок дадут погрешность от неправильности в определении массы каждой заклепки, равную 0,001кг · 7512 = 7,512кг. Если же вместо массы 7512 заклепок мы подсчитаем массу 7510 заклепок, т.е. округлим число заклепок, мы допустим ошибку в 0,085кг · 2 = 0,17кг, почти в 45 раз меньшую, чем ошибка, происходящая от неточности взвешивания. Очевидно, что при расчете массы заклепок нет смысла брать точное их число.

При вычислениях с приближенными величинами возникают несколько задач.

1.Определить границы результата взаимодействия приближенных чисел.

2.Определить погрешность результата вычисления над приближенными числами, заданными с определенной точностью.

3.Определить, с какой точностью надо брать приближенные числа для получения результата требуемой точности.

Отсюда вытекают три способа нахождения результата взаимодействия приближенных чисел: метод границ, метод границ погрешностей, правило подсчета верных цифр.

Метод границ. Данный метод является самым строгим, но в свою очередь самым громоздким. Все числа, которые участвуют в операциях, задаются своими границами. Мы уже рассматривали подобный случай при изучении действий с иррациональными числами, когда каждое из них берется с недостатком – нижняя граница (НГ(x)) числа, и с избытком – верхняя граница (ВГ(x)) числа.

Напомним формулы.

Сложение:

$$НГ(x+y)=НГ(x)+НГ(y)$$

$$ВГ(x+y)=ВГ(x)+ВГ(y)$$

Умножение:

$$НГ(xy)=НГ(x)\cdot НГ(y)$$

$$ВГ(xy)=ВГ(x)\cdot ВГ(y)$$

Вычитание:

$$НГ(x-y)=НГ(x)-ВГ(y)$$

$$ВГ(x-y)=ВГ(x)-РГ(y)$$

Деление:

$$НГ(x:y)=НГ(x):ВГ(y)$$

$$ВГ(x:y)=ВГ(x):РГ(y)$$

Пример 2. Найти значение суммы, разности, произведения и частного чисел $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$.

Решение. Возьмем данные числа с точностью до десятых долей. Имеем 1,4 < $\sqrt{2}$ < 1,5 и 1,7 < $\sqrt{3}$ < 1,8.

Отсюда:

$$1{,}4 + 1{,}7 < \sqrt{2} + \sqrt{3} < 1{,}5 + 1{,}8 \qquad 3{,}1 < \sqrt{2} + \sqrt{3} < 3{,}3;$$

$$1{,}7 - 1{,}5 < \sqrt{3} - \sqrt{2} < 1{,}8 - 1{,}4 \qquad 0{,}2 < \sqrt{3} - \sqrt{2} < 0{,}4;$$

$$1{,}7 \cdot 1{,}4 < \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} < 1{,}8 \cdot 1{,}5 \qquad 2{,}4 < \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} < 2{,}7;$$

$$1{,}7 : 1{,}5 < \sqrt{3} : \sqrt{2} < 1{,}8 : 1{,}4 \qquad 1{,}1 < \sqrt{3} : \sqrt{2} < 1{,}3.$$

Метод границ погрешностей

Сложение. Теорема. Абсолютная погрешность суммы нескольких слагаемых, взятых с недостатком или с избытком, равна сумме абсолютных погрешностей этих слагаемых.

Дано: A, B, C – слагаемые, приближение которых (с недостатком или с избытком) соответственно равно a, b, c, а погрешности равны Δa, Δb, Δc.

Требуется доказать $\Delta(a + b + c) = \Delta a + \Delta b + \Delta c$.

Случай 1. Все приближения a, b, c даны с недостатком.

$$\left.\begin{array}{l} A = a + \Delta a \\ B = b + \Delta b \\ C = c + \Delta c \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A + B + C = (a + b + c) + (\Delta a + \Delta b + \Delta c), \\ \Delta a + \Delta b + \Delta c = (A + B + C) - (a + b + c). \end{array}$$

Производим сложение на основании закона монотонности, применяем закон переместительности и сочетательности.

Следовательно, разность между точным и приближенным значением (погрешность) суммы $(a + b + c)$ равна сумме погрешностей отдельных слагаемых.

Случай 2. Все приближения a, b, c даны с избытком.

$$\left.\begin{array}{l} A = a - \Delta a \\ B = b - \Delta b \\ C = c - \Delta c \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A + B + C = (a + b + c) - (\Delta a + \Delta b + \Delta c), \\ \Delta a + \Delta b + \Delta c = (a + b + c) - (A + B + C). \end{array}$$

Производим сложение на основании закона монотонности, применяем свойства сложения и вычитания и зависимость между компонентами действий.

Следовательно, абсолютная погрешность суммы $(a + b + c)$ равна сумме абсолютных погрешностей отдельных слагаемых $(\Delta a + \Delta b + \Delta c)$, т.е. $\Delta(a + b + c) = \Delta a + \Delta b + \Delta c$.

Следствие. Если некоторые слагаемые взяты с недостатком, а другие с избытком, то погрешность суммы менее суммы погрешностей слагаемых, она равна разности абсолютных погрешностей слагаемых, взятых с недостатком, и абсолютных погрешностей слагаемых, взятых с избытком.

Для сложения приближенных чисел выработаны следующие правила.

Правило. *Чтобы найти сумм нескольких целых или десятичных чисел с точностью до целой или десятичной единицы какого-либо разряда, если слагаемых не более 10, надо взять каждое с числом десятичных знаков на один более, чем у дроби приближения, сложить их, в полученной сумме отбросить последнюю цифру и увеличить на единицу предпоследнюю; полученное таким образом число есть искомая сумма с желаемой степенью точности. Если слагаемых более 10, но не более 100, то надо взять каждое из них с числом десятичных знаков на два более, чем в дроби приближения, сложить их, в сумме отбросить две последние цифры и прибавить единицу к последней удержанной. Полученное число есть искомая сумма с желаемой степенью точности.*

Пример 3. Даны числа: 246,8239052; 32,30567248; 41,701346234; 50,2395277; 23,7452625. Требуется найти значение суммы данных чисел с точностью до 0,01.

Взяв каждое из данных слагаемых с тремя десятичными знаками (на один знак более, чем у дроби приближения), сложим их.

$$246{,}823(1)+32{,}305(1)+41{,}701(\frac{1}{2})+50{,}239(1)+23{,}074(1)=394{,}142(4\frac{1}{2})$$

(В скобках указана абсолютная погрешность в тысячных долях.)

Отбросив от полученного значения суммы последнюю цифру (какова бы она ни была) и увеличив на единицу предпоследнюю, получим число 394,15, которое представляет искомое значение суммы с точностью до 0,01.

Получение значения суммы с заданной точностью возможно только тогда, когда приближенные числа могут быть взяты с необходимой точностью. Если приближенные слагаемые даны с различной степенью точности, то можно только установить степень точности полученной суммы.

Пример 4. Найти значение выражения

$a = 33{,}764 + 8{,}8 + 17{,}39$.

В наименее точном слагаемом последний разряд – десятые доли. Во всех остальных слагаемых нет смысла удерживать доли, следующие за десятыми. Отделяем отбрасываемые доли чертой: $a = 33{,}7|64 + 8{,}8| + 17{,}3|9 = 59{,}8 \approx 60$.

Значение суммы найдено с точностью до одной единицы.

Вычитание. Теорема 1. Абсолютная погрешность разности двух приближенных чисел равна разности их абсолютных погрешностей, если оба они взяты с недостатком или оба с избытком.

Дано: A – уменьшаемое, B – вычитаемое, приближения которых (с недостатком или с избытком) соответственно равны a и b, а погрешности равны Δa, Δb.

Требуется доказать: $\Delta(a-b)$ = $\Delta a - \Delta b$ (с недостатком) и $\Delta b - \Delta a$ (с избытком).

Случай 1. Даны приближения a и b с недостатком, т.е. $A = a + \Delta a$, $B = b + \Delta b$.

Можно записать $A - B = (a + \Delta a) - (b + \Delta b)$.

Применяем свойства сложения и вычитания и зависимость между компонентами действий.

$$A - B = (a + \Delta a) - (b + \Delta b) = a + \Delta a - b - \Delta b =$$
$$= a - b + \Delta a - \Delta b = (a - b) + (\Delta a - \Delta b)$$

Имеем $A - B = (a - b) + (\Delta a - \Delta b)$, отсюда

$$\Delta a - \Delta b = (A - B) - (a - b) = \Delta(a - b).$$

Случай 2. Даны приближения a и b с избытком, т.е. $A = a - \Delta a$, $B = b - \Delta b$. Тогда $A - B = (a - \Delta a) - (b - \Delta b)$.

Применяем свойства сложения и вычитания и зависимость между компонентами действий.

$$A - B = (a - \Delta a) - (b - \Delta b) = a - \Delta a - b + \Delta b =$$
$$= a - b + \Delta b - \Delta a = (a - b) + (\Delta b - \Delta a)$$

Имеем $A-B=(a-b)+(\Delta b-\Delta a)$, отсюда

$$\Delta b-\Delta a=(A-B)-(a-b)=\Delta(a-b).$$

Теорема 2. Абсолютная погрешность разности двух приближенных чисел равна сумме абсолютных погрешностей уменьшаемого и вычитаемого, если одно из чисел взято с недостатком, а другое с избытком.

Дано: A – уменьшаемое, B – вычитаемое, приближения которых соответственно равны a и b, а погрешности равны Δa и Δb.

Доказать: погрешность разности $a-b$ равна сумме погрешностей уменьшаемого и вычитаемого $\Delta a+\Delta b$, т.е. верно равенство $\Delta(a-b)=\Delta a+\Delta b$.

Так как $A=a+\Delta a$, $B=b-\Delta b$, можно записать $A-B=(a+\Delta a)-(b-\Delta b)$.

$$A-B=(a+\Delta a)-(b-\Delta b)=a+\Delta a-b+\Delta b=$$
$$=a-b+\Delta b+\Delta a=(a-b)+(\Delta b+\Delta a)$$

Имеем $A-B=(a-b)+(\Delta b+\Delta a)$, отсюда

$$\Delta b+\Delta a=(A-B)-(a-b)=\Delta(a-b).$$

На основании данных свойств при вычитании приближенных целых и десятичных чисел руководствуются следующим правилом.

Правило. *Чтобы найти значение разности двух приближенных целых или десятичных чисел с точностью до целой или десятичной единицы данного разряда, надо в уменьшаемом и вычитаемом отбросить все цифры, стоящие вправо от той, которая выражает единицу разряда степени точности; затем найти значение разности полученных чисел.*

Поясним это на числовых примерах.

Пример 1. Даны числа: 12,642578 и 8,361057. Требуется найти значение разности данных чисел с точностью до 0,01.

Возьмем уменьшаемое и вычитаемое с таким же числом десятичных знаков в каждом, какое имеет дробь приближения, и выполним вычитание: $12{,}64-8{,}36=4{,}28$.

Число 4,28 представляет искомое значение разности с точностью до 0,01.

Пример 2. 5,628 и 3,524 даны с точностью до 0,001. Какую точность будет иметь разность этих чисел?

$5{,}628(0{,}001) - 3{,}524(0{,}001) = 2{,}104$ с точностью до 0,002.

(В скобках указана абсолютная погрешность в тысячных долях.)

Так как обычно абсолютная погрешность приближенных чисел дается с точностью до $\frac{1}{2}$ последнего разряда, то абсолютная погрешность разности будет определяться единицей последнего разряда.

Умножение. Правило. *При умножении приближенного числа на точное абсолютная погрешность произведения равна абсолютной погрешности первого множителя, умноженной на точный множитель.*

Это положение очевидно без доказательства.

Пример 1. Дано число 8,342 с точностью до 0,001, умножить его на 10. Произведение равно 83,42 с точностью до 0,01. Абсолютная погрешность первого множителя менее 0,001, а абсолютная погрешность произведения менее 0,001·10, т.е. менее 0,01.

Пример 2. Дано число 8,342 с точностью до 0,001, умножить его на 53. Получаем $8{,}342 \cdot 53 = 442{,}126 \approx 442{,}1$.

Абсолютная погрешность этого произведения менее 0,001·53, или менее 0,053, т.е. она менее 0,1, но может быть более 0,01. Вследствие этого сотые и тысячные доли в произведении следует отбросить, так как они могут оказаться неверными: тогда произведение равно будет 442,1 с абсолютной погрешностью меньше 0,1.

Теорема. Абсолютная погрешность произведения двух приближенных чисел равняется сумме произведений каждого числа на абсолютную погрешность другого и произведению абсолютных погрешностей данных чисел.

Даны: A и B – множители, приближения которых (с недостатком или с избытком) соответственно равны a и b, а абсолютные погрешности – Δa и Δb.

Доказать: абсолютная погрешность произведения ab равна сумме произведений $a\Delta b + b\Delta a + \Delta a\Delta b$. Числа a и b взяты с недостатком.

Пусть $A = a + \Delta a$, $B = b + \Delta b$.

Тогда $A \cdot B = ab + (a\Delta b + b\Delta a + \Delta a\Delta b)$.

Отсюда $a\Delta b + b\Delta a + \Delta a\Delta b = A \cdot B - ab$

Следовательно, $\Delta(ab) = a\Delta b + b\Delta a + \Delta a\Delta b$.

Произведение абсолютных погрешностей данных чисел ($\Delta a\Delta b$) незначительно по сравнению с другими произведениями ($a\Delta b$ и $b\Delta a$), входящими в выражение абсолютной погрешности произведения, его можно опустить. Тогда абсолютная погрешность произведения двух приближенных чисел будет равна сумме произведений каждого числа на абсолютную погрешность другого: $A \cdot B - ab = a\Delta b + b\Delta a$.

Разделив абсолютную погрешность произведения на произведение приближенных чисел, находим относительную погрешность произведения $\dfrac{a\Delta b + b\Delta a}{ab} = \dfrac{\Delta b}{b} + \dfrac{\Delta a}{a}$, т.е. относительная погрешность произведения равна сумме относительных погрешностей его множителей.

***Деление*.** Правило. *Абсолютная погрешность частного, полученного от деления приближенного числа на точное, равна абсолютной погрешности делимого, разделенной на делитель*.

Пример. Дано: 235,7 – приближенное число с точностью до 0,1 и делитель 100 – точное число. Частное равно 2,357 с точностью до 0,001. Абсолютная погрешность уменьшилась в 100 раз.

Теорема. Абсолютная погрешность частного, полученного от деления приближенного числа на приближенное, равна сумме произведений абсолютной погрешности делимого на делитель и абсолютной погрешности делителя на делимое, деленной на квадрат делителя.

Пусть:

a – приближенное делимое,

Δa – абсолютная погрешность делимого,

A – точное значение делимого $a + \Delta a$,

b – приближенный делитель,

Δb – абсолютная погрешность приближенного делителя,

B – точное значение делителя $b + \Delta b$.

Тогда: $\dfrac{A}{B} = \dfrac{a + \Delta a}{b + \Delta b}$ – точное частное,

$\dfrac{a}{b}$ – приближенное частное,

Абсолютная погрешность:

$\Delta\left(\dfrac{a}{b}\right) = \dfrac{a + \Delta a}{b + \Delta b} - \dfrac{a}{b} = \dfrac{ab + \Delta ab - ab - \Delta ba}{(b + \Delta b)b} = \dfrac{\Delta ab - \Delta ba}{(b + \Delta b)b}$ – абсолютная погрешность частного.

Так как Δa и Δb могут иметь разные знаки, то абсолютная величина разности (Δab – Δba) может быть равна сумме абсолютных значений (Δab + Δba). Кроме того, (b + Δb) в знаменателе мало отличается от b и поэтому (b + Δb)b можно заменить $b{\cdot}b$, или b^2.

Тогда абсолютная погрешность равна $\dfrac{\Delta ab - \Delta ba}{b^2}$, т.е. абсолютная погрешность частного равна сумме произведений абсолютной погрешности делимого на делитель и абсолютной погрешности делителя на делимое, деленной на квадрат делителя.

Верно равенство: $\Delta(a : b) = \dfrac{\Delta ab - \Delta ba}{b^2}$.

Пример:

a = 25,6 (Δa = 0,02).

b = 6,2 (Δb = 0,04).

Значение частного 25,6 : 6,2 $\approx$ 4,1.

Тогда $\Delta\left(\dfrac{a}{b}\right) = \dfrac{25{,}6 \cdot 0{,}04 + 6{,}2 \cdot 0{,}02}{38{,}44} = \dfrac{1{,}148}{38{,}44} = 0{,}03$.

Теорема. Наибольшая относительная погрешность частного равна сумме наибольших относительных погрешностей делимого и делителя.

Относительная погрешность частного равна абсолютной погрешности, деленной на приближенное частное:

$$\frac{\Delta ab+\Delta ba}{b^2}:\frac{a}{b}=\frac{(\Delta ab+\Delta ba)b}{b^2 a}=\frac{\Delta ab^2+\Delta bab}{b^2 a}=\frac{\Delta ab^2}{b^2 a}+\frac{\Delta bab}{b^2 a}=\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{b}$$

т.е. относительная погрешность частного равна сумме относительных погрешностей делимого и делителя.

$$\frac{0{,}02\cdot 100}{25{,}6}+\frac{0{,}04\cdot 100}{6{,}2}\approx 0{,}1\%+0{,}6\%\approx 0{,}7\% \text{ или } \frac{0{,}03\cdot 100}{4{,}1}\approx 0{,}7\%.$$

Правило подсчета верных цифр. Когда нет необходимости производить вычисление со строгим учетом погрешностей, применяются так называемые правила подсчета цифр. Для удобства договорились первую сомнительную цифру в записи приближенного числа подчеркивать. Если необходимо выполнить действия с несколькими числами, то в промежуточном результате следует оставлять одну дополнительную сомнительную цифру для более точного нахождения значения выражения, которая в последнем действии отбрасывается по правилам округления.

Сложение и вычитание приближенные чисел

Правило 1. *При сложении и вычитании приближенных чисел по правилу подсчета цифр в результате следует сохранять столько десятичных знаков, сколько их в приближенном данном с наименьшим числом десятичных знаков.*

При сложении и вычитании различают два случая.

1.Компоненты даны с одинаковой точностью.

Пример 1: $3{,}8\underline{2}+6{,}5\underline{4}+32{,}6\underline{8}=43{,}0\underline{4}$. Подчеркнутая цифра сотых долей в каждом из слагаемых сомнительна. Она остается сомнительной и в результате.

Пример 2: $96{,}\underline{3}-54{,}\underline{2}=42{,}\underline{1}$. В остатке сомнительная цифра того же разряда, как и в компонентах.

2.Точность компонентов различна.

Пример 3: $7{,}54+12{,}3+0{,}724$. Поставим на место неизвестных цифр знаки вопроса, отделим отбрасываемые доли чертой и подчеркнем сомнительную цифру. В сумме нет смысла оставлять сотые и тысячные доли, так как во втором слагаемом сотые и тысячные доли неизвестны.

$$7,\underline{5}\,|\,4??+12,\underline{3}\,|\,???+0,\underline{7}\,|\,24?=20,\underline{6}\,.$$

П р и м е р 4: $108,\underline{5}\,|\,??-3,\underline{3}\,|\,43=105,\underline{1}\,|\,6\approx 105,\underline{2}$. Во избежание накопления ошибок при округлении чисел в числах, имеющих больше десятичных знаков, оставляют один знак запасным.

Следует избегать нулей, поставленных взамен неизвестных или отброшенных цифр, выражая приближенное число в более крупных единицах.

П р и м е р 5: $72000+32100+5480$. Выражаем все слагаемые в тысячах: $72+32,\underline{1}+5,\underline{48}=109,\underline{58}\approx 110\textit{тыс}.$ Округляем согласно правилу до целых тысяч.

Умножение и деление приближенных чисел

П р а в и л о 2. *При умножении и делении приближенных чисел в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет приближенное данное с наименьшим числом значащих цифр.*

Ниже приведены примеры на умножение и деление приближенных чисел с одинаковым числом значащих цифр и различным числом значащих цифр в компонентах.

П р и м е р 1. Найти площадь прямоугольника. Длина 64,8м, ширина 86,3м. Ставим на место отброшенных сантиметров знаки вопроса, подчеркнем сомнительную цифру и отделим чертой надежную часть в результате от ненадежной:

$$64,\underline{8}?\cdot 86,\underline{3}?=559\,|\,\underline{2,24}??\approx 5590\,.$$

Рассматривая, как получались цифры значения произведения, мы видим, что цифры разрядов тысяч, сотен и десятков вполне надежные, цифра разряда единиц не вполне надежная. Это зависит от величины отброшенных сотых долей. Десятые и сотые доли значения произведения нет смысла удерживать в окончательном ответе.

Значение произведения берем с тремя значащими цифрами: площадь прямоугольника 5590кв.м.

Пример 2. Вычислить произведение $1\frac{1}{7}\cdot\frac{5}{6}$, обратив первую дробь в десятичную с четырьмя значащими цифрами, вторую – с двумя значащими цифрами: $1\frac{1}{7}\approx 1{,}143$, $\frac{5}{6}=0{,}833\ldots\approx 0{,}83$.

Найдем верные цифры значения произведения, заменив отброшенные цифры знаками вопроса. Округлим первый множитель до трех значащих цифр: $1{,}14?\cdot 0{,}83?=0{,}94\,|\,\underline{62}\,??\approx 0.95$.

Правило 3. *При делении в результате сохраняют столько значащих цифр, сколько их имеет приближенное данное с наименьшим числом значащих цифр.*

Пример 3. Масса куска алюминия 654,7г. Удельный вес алюминия 2,6. Найти объем этого куска.

Решение. Делим приближенное число с четырьмя значащими цифрами на приближенное число с двумя значащими цифрами. Согласно правилу в результате должны оставить две значащие цифры. Запишем деление со знаками вопроса:

$$654{,}7?:2{,}6?\approx 250\,.$$

Пример 4. Вычислить боковую поверхность конуса по формуле $S=\pi rl$, при r = 0,675м, l = 1,2м, π = 3,14.

Решение. Подставляя данные в формулу, получим:

$$S=3{,}1\underline{4}\cdot 0{,}67\underline{5}\cdot 1{,}2\,.$$

По правилу подсчета верных цифр при выполнении действий с приближенными числами окончательный результат должен содержать две значащие цифры; промежуточные действия производим с одной запасной цифрой:

$$0{,}67\underline{5}\cdot 3{,}1\underline{4} = 2{,}11950 \approx 2{,}1\underline{2}.$$
$$2{,}1\underline{2}\cdot 1{,}2 = 2{,}544 \approx 2{,}5(\text{м}^2).$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Сравните числа:

а) $\sqrt{2}$ и 1,43124…; б) $\sqrt{17}$ и $4\frac{6}{25}$;

в) 3,(4) и $3\frac{1}{25}$; г) 8,211216 и 8,(211).

2. Найдите первые три десятичных знака суммы и произведения чисел x и y, если

а) $x = 1{,}703504\ldots$ $y = 2{,}042537\ldots$

б) $x = 4{,}30(23)$ $y = 6{,}032410\ldots$

3. Среди следующих высказываний укажите истинные:

$\frac{5}{12} = 0{,}41(6)$; $\sqrt{11} > 3{,}4$; $\sqrt{5} < 2\frac{1}{3}$.

4. Длины отрезков (при одной и той же единице длины) выражаются числами: 4; 8; 1; $\sqrt{3}$; 0,(12); $2\frac{7}{13}$. Какие из этих отрезков соизмеримы и какие несоизмеримы с единицей длины?

5. Вычислить значения выражений с точностью до 0,01.

а) $\dfrac{1}{\frac{1}{48}+\frac{1}{13}+\frac{1}{5}}$; б) $\dfrac{0{,}51}{\frac{1}{3}+\frac{1}{27}+\frac{1}{11}}$.

6. Сколько десятичных знаков в следующих числах: 5,2; 0,2361; 7,005; 234,7; 18,0; 473?

7. Сколько значащих цифр в числах: 6,5; 0,37; 0,806; 3,003; 302,06?

8. Сколько десятичных знаков и сколько значащих цифр в числах: 3,75; 0,806; 28,0?

9. Какая разница между записями: 37° и 37,0°; 15 г и 15,0 г; 24,4 м и 24,40 м?

10. Сколько значащих цифр имеет каждое из следующих приближенных чисел, если они даны с точностью до одной сотни:52300 км, 205000 т, 6400 км, 15060000 га?

11. Округлить до единицы следующие числа с недостатком и с избытком:6,804 м; 4,2 т; 803,06 га; 3584,7 руб.

12. Округлить до одного, двух, трех десятичных знаков: 5,3162; 0,087786; 3,00406; 42,82604.

13. Округлить следующие числа до 3, 2, 1 значащих цифр:0,785; 2,679; 0,316; 4,7324.

14. Население четырех городов характеризуется следующими числами: 183715 чел., 711510 чел., 914805 чел., 1103200 чел. Указать население этих городов округленно в тысячах.

15. В следующих задачах найти среднее арифметическое и округлить его так, чтобы все цифры, кроме последней, были верны, а последняя была сомнительной:
а) При измерении длины улицы сделано 4 замера и получены следующие результаты: 1846 м, 1864 м, 1888 м, 1872 м. Найти среднюю длину улицы.
б) Взвешивание пяти мешков муки дало следующие результаты: 80,65 кг, 80,18 кг, 80,73 кг, 80,39 кг, 80,50 кг. Найти средний вес мешка муки.

16. Найти абсолютную и относительную погрешность приближенного числа 0,66, если его истинное значение 2/3.

17. Округлить число 3478 руб. до круглых сотен. Найти абсолютную и относительную погрешности

18. Угол x больше $40^{o}20'$ и меньше $40^{o}30'$. Определить границы абсолютной и относительной погрешности.

19. При измерении некоторой величины получен результат $62\pm1\%$. Вычислите границы, в которых заключено значение этой величины.

20. Ток идет по проводнику с сопротивлением 10 Ом, известному с точностью 10 %. Ток равен $(2\pm0{,}1)$ А. Вычислить методом границ границы абсолютной и относительной погрешности вычисленного напряжения.

21. Вычислите периметр треугольника и границу его абсолютной погрешности методом границ погрешностей, если длины сторон равны

а) 23,5 см $< a <$ 23,6см;
б) 12,0 см $< b <$12,1 см;
в) 32,8 см $< c <$ 32,9 см.

22. Найти значение выражений, все числа приближенные:

а) $17{,}7 \cdot 30{,}6 + 17{,}2 \cdot 9{,}4$; б) $\dfrac{643 \cdot 2{,}1524}{2{,}7} - \dfrac{0{,}152 \cdot 45{,}3}{6{,}823}$,

3. ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ

Понятие числовой функции. Понятие «функция» – это важнейшее понятие математики, которое широко используется во многих других науках. С помощью функции отражается зависимость между различными величинами реального мира.

Известно, что длина пройденного пути зависит от времени движения, площадь круга от радиуса, объем газа от давления, масса тела от плотности и т.д.

Важность и сложность понятия функции требует постепенной и систематической подготовки обучающихся к его усвоению. Пропедевтика функциональной зависимости начинается с ДОУ и начальной школы, следовательно, воспитатель и учитель начальной школы должны быть подготовлены к такой работе.

В начальном курсе математики серьезное внимание уделяется решению задач с пропорциональными величинами, которые находятся в прямо пропорциональной или обратно пропорциональной зависимости.

Определение 1. Пусть X и Y – некоторые числовые множества $(X \subset R, Y \subset R)$. *Числовой функцией*, определенной на множестве X со значениями из множества, называется соответствие *f*, которое каждому числу $x \in X$ соотносит единственное число $y \in Y$.

Определение 2. Число y называют *значением* функции f в точке x и обозначают $f(x)$, то есть $y = f(x)$.

Определение 3. Переменную x называют *независимой переменной* или *аргументом* функции.

Определение 4. Множество X называют *областью определения*, а множество $E \subset Y$ – *множеством значений* функции.

В дальнейшем числовую функцию будем называть просто функцией, так как других видов функций рассматривать не будем.

Способы задания функций. В зависимости от того, как описано соответствие между числами x и y, различают способы задания функций. Рассмотрим некоторые из них.

Аналитический способ. Если функция задана при помощи одной или нескольких формул, то говорят, что она задана *аналитически*. Формула указывает совокупность операций, которые необходимо выполнить, чтобы по значению аргумента найти соответствующее значение функции.

Например, с помощью формулы $y = x^2$, $x \in (0;+\infty)$, можно аналитически задать зависимость площади квадрата y от его стороны x.

Формула $y = 2\pi x$, $x \in (0;+\infty)$ задает зависимость длины окружности y от ее радиуса x.

Из школьного курса математики известны элементарные функций, которые задаются с помощью следующих формул: $y = kx + b$, где k, b – константы и $k \neq 0$ (линейная функция), $y = ax^2 + bx + c$, где a, b, c – константы и $a \neq 0$ (квадратичная функция), $y = \sin x$ (тригонометрическая) и т.д.

Если область определения функции, заданной аналитически, не указана явно, то считают, что функция определена на множестве всех тех значений аргумента, при которых аналитическое выражение $f(x)$ имеет смысл и принимает только действительные значения.

Например, областью определения функции, заданной формулой $y = \sqrt{x-3}$, является луч $[3;+\infty)$. Если зависимость между аргументом x и функцией y задается формулой $y = \dfrac{5}{2-x}$, то область определения этой функции – $x \neq 2$ или $(-\infty;2) \cup (2;+\infty)$.

Иногда, функция на различных участках числовой прямой задается различными формулами. В этом случае говорят, что функция задана *кусочно-аналитически*.

Например, $y = \begin{cases} 5 - x, & \text{если } x \leq 5 \\ x - 5, & \text{если } x \geq 5 \end{cases}$.

При аналитическом способе задании функции ее область определения можно найти, можно вычислить точные значения самой функции, которые соответствуют определенным значения аргумента, однако представить какими свойствами будет обладать функция, заданная той или иной формулой, на разных числовых промежутках бывает нелегко. Поэтому к недостаткам аналитического задания функции следует отнести малую наглядность

Графический способ. В отличие от аналитического способа задания функции графический способ нагляден, он дает возможность значительно упростить изучение свойств функции. Поэтому даже в том случае, когда функция задана аналитически, стараются построить ее график на координатной плоскости, для этого существуют различные способы исследования функции, заданной с помощью формулы.

Определение 1. *Графиком* функции *f*, заданной на множестве *X*, называется множество точек координатной плоскости, имеющих координаты *x* и $f(x)$ для всех $x \in X$.

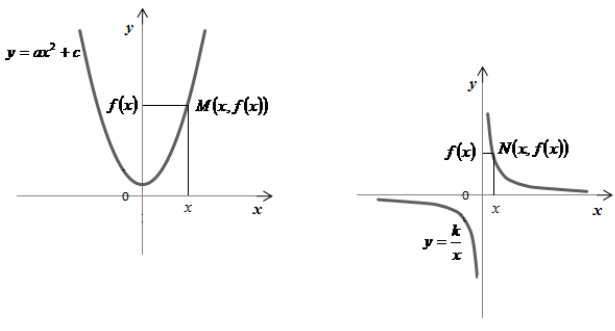
$$G_f = \{M(x, y) | \, x \in X, y = f(x)\}$$

Определение 2. Равенство $y = f(x)$ называется *уравнением* этого графика.

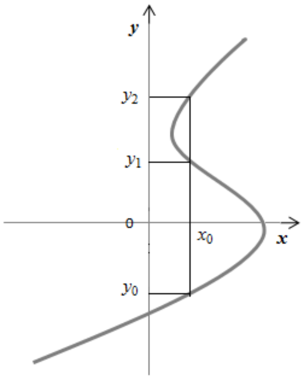
Говорят, что функция задана *графически*, если начерчен ее график.

Графики основных элементарных функций представляют собой некоторые сплошные (непрерывные) линии. Однако график может состоять из нескольких кусков линий или отдельных изолированных точек.

Таким образом, каждой функции соответствует график этой функции (некоторое множество точек плоскости). На рисунке мы видим два графика функций.



Обратное утверждение неверно, не каждой линии на плоскости соответствует функция. На нижеследующем рисунке видно, что изображенная линия не связана ни с какой функцией, так



как точке x_0 соответствуют три числа y_0, y_1, y_2, что противоречит определению функции.

Графический способ задания функции удобен при различных наблюдениях, требующих наглядности, но он не точен. Поскольку нахождение значения функции по некоторому значению аргумента можно сделать зачастую только приближенно, с некоторой погрешностью. В этом и заключается основной недостаток графического способа задания функции.

Табличный способ. Иногда функцию задают в виде таблицы. В таблице для отдельных значений аргумента даны точные значения функции, что позволяет наглядно представить изменение значений функции y в зависимости от изменения значения аргумента x. Однако неизвестно определена ли функция в точках, которые находятся в промежутках между указанными в таблице значениями аргумента и если определена, то чему равны ее значения. Для ответа на эти вопросы нужны дополнительные исследования. В этом состоит недостаток табличного способа задания функции. Тем не менее, этот способ задания функции часто используется на практике, особенно в тех случаях, когда множество X конечно.

Например, с помощью таблицы можно представить зависимость между временем суток *x* и температурой воздуха *y*.

Пример. В таблице показано изменение температуры в зависимости от времени.

x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
y	15	14	14	16	17	22	28	30	29	25	24	22	19

Удобнее всего изучать свойства функции, когда она задана и аналитически, и графически, причем для построения графика аналитически заданной функции часто составляют таблицы.

Словесный способ. Функция может быть задана и словесным описанием закона соответствия между элементами множеств *X* и *Y*. Иногда для таких функций вводятся специальные обозначения, чтобы запись закона соответствия смотрелась компактно. Среди известных функций к словесно заданным можно отнести следующие.

1. Функция $y = [x]$ целая часть *x* (антье), то есть наибольшее целое число, не превосходящее *x*.

Например, $[1{,}9] = 1$; $[5] = 5$; $[-0{,}7] = -1$.

2. Функция $y = \{x\}$, $x \in R$, $\{x\}$ обозначает дробную часть числа *x*, то есть $\{x\} = x - [x]$.

Например, $\left\{-\frac{7}{2}\right\} = \left\{-3\frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}$; $\left\{\frac{11}{5}\right\} = \left\{2\frac{1}{5}\right\} = \frac{1}{5}$; $\{7\} = 0$.

3. Функция $y = \pi(x)$ – количество простых чисел, не превосходящих числа *x*.

Например, $\pi(2) = 0$; $\pi(7) = 3$; $\pi\left(\frac{17}{3}\right) = 3$.

Некоторые классы функций. Функции, как правило, описывают некоторые процессы, поэтому по поведению функции делают вывод о том, как эти процессы протекают. Исследование же поведения функции сводится к выяснению того, как изменяется функция в зависимости от изменений аргумента, то есть определяют свойства на различных промежутках.

Рассмотрим некоторые свойства функции.

Определение 1. Функция $y = f(x)$, где $x \in X$ называется *возрастающей* на множестве $X_1 \subset X$, если для любых $x_1, x_2 \in X_1$, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) \le f(x_2)$.

Если же для любых $x_1, x_2 \in X_1$, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, функция $f(x)$ называется *строго возрастающей* на множестве X_1.

Иначе говорят, что функция $f(x)$ строго возрастает (на множестве $X_1 \subset X$), если большему значению аргумента (x из X_1) соответствует большее значение функции $f(x)$.

Определение 2. Функция $y = f(x)$, где $x \in X$ называется *убывающей* на множестве $X_1 \subset X$, если для любых $x_1, x_2 \in X_1$, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) \ge f(x_2)$.

Если же для любых $x_1, x_2 \in X_1$, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$, функция $f(x)$ называется *строго убывающей* на множестве X_1.

Иначе говорят, что функция $f(x)$ строго убывает (на множестве $X_1 \subset X$), если большему значению аргумента (x из X_1) соответствует меньшее значение функции $f(x)$.

Если функция $f(x)$ только возрастает или только убывает на множестве X_1, то говорят, что она *монотонна* (монотонно возрастает или монотонно убывает) на этом множестве.

Определение 3. Множество чисел X называют симметричным относительно нуля, если вместе с любым числом x из этого множества в нем содержится и противоположное число $(-x)$, то есть $x \in X \Rightarrow -x \in X$.

Например, симметричными относительно нуля являются следующие множества:

a) вся числовая прямая $(-\infty; +\infty)$;

b) любой интервал $(-a; a)$, где $a > 0$;

c) множество вида $(-\infty; -a) \cup (a; +\infty)$, где $a > 0$ и т.д.

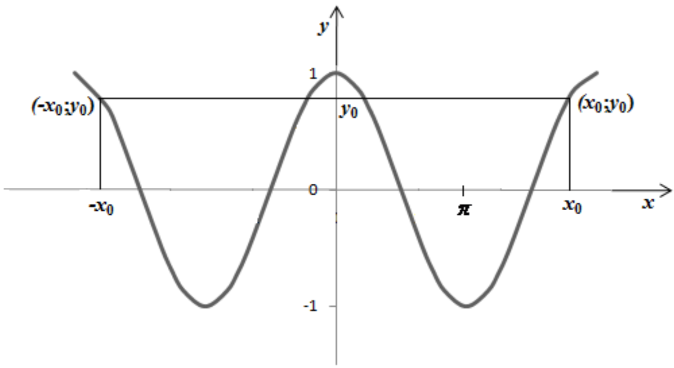
Определение 4. Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если область ее определения X есть множество, симметричное относительно нуля, и для любого $x \in X$ выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

Например, четными являются следующие функции:

a) $y = x^4$, так область ее определения вся числовая прямая $(-\infty;+\infty)$, (то есть множество, симметричное относительно нуля) и $f(-x) = (-x)^4 = x^4 = f(x)$;

b) $y = |x|$, так как так область ее определения вся числовая прямая $(-\infty;+\infty)$, и $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$.

Так как по определению четной функции каждой паре значений аргумента, равных по абсолютной величине, но противоположных по знаку, соответствуют равные значения функции, следовательно, график четной функции симметричен относительно оси ординат. Действительно, вместе с точкой $(x, f(x))$ графику принадлежит и симметричная ей относительно оси ординат точка $(-x, f(x))$. На рисунке изображен график четной функции $y = \cos x$.



Таким образом, для построения графика четной функции достаточно построить его часть, которая соответствует положительным значениям аргумента, а затем воспользоваться симметричностью и отобразить построенную часть графика симметрично относительно оси ординат.

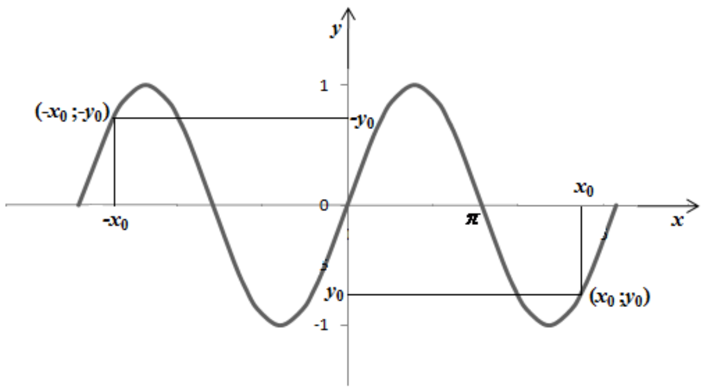
Определение 5. Функция $y = f(x)$ называется *нечетной*, если область ее определения X есть множество, симметричное относительно нуля, и для любого $x \in X$ выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

Например, нечетными являются следующие функции:

a) $y = x^3$, так область ее определения вся числовая прямая $(-\infty;+\infty)$, (то есть множество, симметричное относительно нуля) и $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$;

b) $y = x|x|$, так как так область ее определения вся числовая прямая $(-\infty;+\infty)$, и $f(-x) = -x|-x| = -x|x| = -f(x)$.

Так как по определению нечетной функции каждой паре значений аргумента, равных по абсолютной величине, но противоположных по знаку, соответствуют равные по абсолютной величине и противоположные по знаку значения функции, следовательно, график нечетной функции симметричен относительно начала координат. Действительно, вместе с точкой $(x, f(x))$ графику принадлежит и симметричная ей относительно начала координат точка $(-x, -f(x))$. На рисунке изображен график нечетной функции $y = \sin x$.



Таким образом, для построения графика нечетной функции достаточно построить его часть, которая соответствует положительным значениям аргумента, а затем воспользоваться симметричностью и отобразить построенную часть графика симметрично относительно начала координат.

Прямая пропорциональность. В математике часто приходится рассматривать три величины, одна из которых равна произведению двух других. Такие величины постоянно встречаются при решении задач с практическим содержанием. Например, по известным скорости и времени необходимо найти путь при равномерном движении; определить стоимость товара, если известны его цена и количество; исходя из производительности труда и времени работы вычислить ее объем и т.д. Все перечисленные виды задач и многие другие рассматриваются как в ДОУ, так и в начальной школе, поэтому педагоги должны быть подготовлены к рассмотрению различных зависимостей между величинами.

Математическая запись, которая выражает рассмотренные зависимости, имеет вид: $y = zx$. Если одна из переменных x или z постоянна (пусть $z = k = const$), то получается равенство вида $y = kx$. В этом случае говорят, что величина y прямо пропорциональна величине x.

Определение 1. *Прямой пропорциональностью* называется функция, которая может быть задана при помощи формулы вида $y = kx$, где x – независимая переменная, а k – неравное нулю действительное число.

Определение 2. Число k при этом называют *коэффициентом пропорциональности*.

Пусть x_1 и $x_2 \neq 0$ – два различных значения переменной x, тогда $y_1 = kx_1$ и $y_2 = kx_2$. Так как $x_2 \neq 0$ и $k \neq 0$, то $y_2 \neq 0$. Тогда $\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1}{x_2}$.

Определение 3. Установленное свойство называют *основным свойством прямой пропорциональности*.

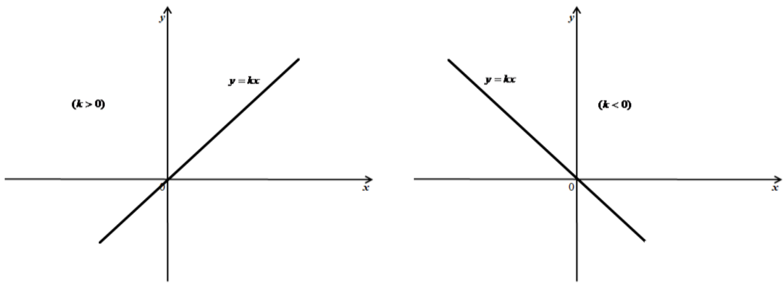
Если значениями переменных x и y являются положительные числа, то основное свойство можно сформулировать так: во сколько раз увеличивается (уменьшается) значение переменной x, во столько же раз увеличивается (уменьшается) значение переменной y.

Областью определения функции $y = kx$ является множество всех действительных чисел R.

При $k > 0$ функция $y = kx$ монотонно возрастает на всей области определения, а при $k < 0$ монотонно убывает. Функция является нечетной, а значит, график ее симметричен относительно начала координат.

Графиком функции, заданной уравнением $y = kx$, является прямая линия, проходящая через начало координат и имеющая угловой коэффициент k. Таким образом, коэффициент пропорциональности k совпадает с угловым коэффициентом графика функции $y = kx$.

Для того чтобы найти коэффициент пропорциональности, достаточно знать одну пару (x_0, y_0) (где $x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$) соответствующих значений. Тогда из равенства $y_0 = kx_0$ находим $k = \dfrac{y_0}{x_0}$.



Знание прямо пропорциональной зависимости позволяет использовать ее свойства при решении задач в начальной школе.

Так, при постоянной скорости пройденный путь y прямо пропорционален времени движения x, причем коэффициентом пропорциональности k является скорость.

Аналогично, при постоянной цене товара его стоимость y прямо пропорциональна количеству товара x, а коэффициентом пропорциональности k является цена.

Линейная функция. Более общим понятием, чем прямая пропорциональность, является линейная зависимость между величинами.

Например, необходимо решить задачу: «До перерыва работница упаковала вручную 20 коробок конфет, а потом перешла на автомат, выпускающий 50 коробок в час. Сколько коробок выпустит упаковщица за смену, если проработает на автомате 2 ч? 3 ч? 4 ч?»

Решение. Очевидно, что зависимость между выполненным объемом работы y и временем работы упаковщицы на автомате x выражается формулой $y = kx + b$, где $b = 20$ кор., а $k = 50$ кор/ч.

Тогда при $x = 2$ч $\quad y = 50 \cdot 2 + 20 = 120$ кор.;

при $x = 3$ч $\quad y = 50 \cdot 3 + 20 = 170$ кор.;

при $x = 4$ч $\quad y = 50 \cdot 4 + 20 = 220$ кор.

Ответ: Упаковщица за смену выпустит 120 коробок; 170 коробок; 220 коробок.

Определение. *Линейной функцией* называется функция, которую можно задать при помощи формулы вида $y = kx + b$, где x – независимая переменная, а k и b – заданные действительные числа.

Определим *свойства* линейной функции.

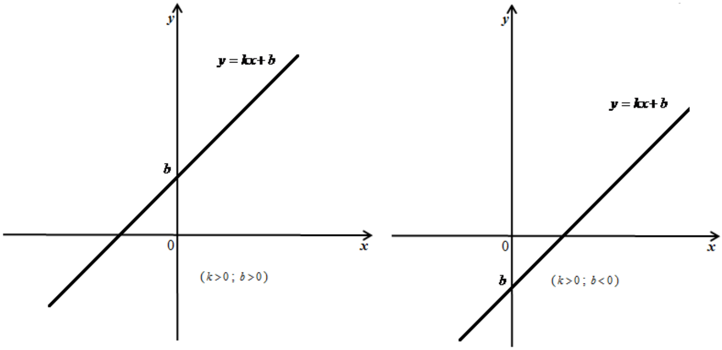
Областью определения линейной функции является множество всех действительных чисел R.

При $k \neq 0$ и $b \neq 0$ линейная функция $y = kx + b$ не является ни четной, ни нечетной.

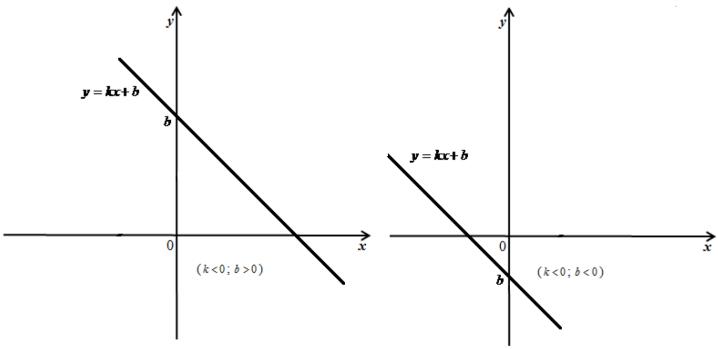
Пусть x_1 и x_2 – два различных значения переменной x, где $x_1 < x_2$. Сравним $y_1 = kx_1 + b$ и $y_2 = kx_2 + b$. Для этого рассмотрим разность $y_2 - y_1 = (kx_2 + b) - (kx_1 + b) = k(x_2 - x_1)$.

Так как по условию $x_2 - x_1 > 0$, то знак разности $y_2 - y_1$ зависит от знака коэффициента k.

Пусть $k > 0$, тогда из равенства $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$ следует, что $y_2 - y_1 > 0$, то есть из того, что $x_2 > x_1 \Rightarrow y_2 > y_1$, а значит, функция $y = kx + b$ монотонно возрастает на всей области определения.



Пусть $k < 0$, тогда из равенства $y_2 - y_1 = k\,(x_2 - x_1)$ следует, что $y_2 - y_1 < 0$, то есть из того, что $x_2 > x_1 \Rightarrow y_2 < y_1$, а значит, функция $y = kx + b$ монотонно убывает на всей области определения.



Графиком функции, заданной уравнением $y = kx + b$ является прямая линия с угловым коэффициентом k.

Обратная пропорциональность. Рассмотрим еще раз зависимость между тремя величинами, которая выражается равенством: $y = zx$. Зафиксируем теперь величину (переменную) y (пусть $y = k = const$). Тогда z и x будут связаны соотношением $k = zx$ или $z = \frac{k}{x}$. В этом случае говорят, что величины x и z находятся в обратно пропорциональной зависимости.

Примерами величин, находящихся в обратно пропорциональной зависимости, являются: скорость и время при постоянном расстоянии; цена и количество товара при постоянной стоимости; производительность труда и время при постоянном объеме работы; длина и ширина при фиксированной площади прямоугольника и т.д.

Определение. *Обратной пропорциональностью* называется функция, которая может быть задана при помощи формулы вида $y=\frac{k}{x}$, где x – независимая переменная, а k – неравное нулю действительное число.

Пусть x_1 и $x_2 \neq 0$ – два различных значения переменной x, тогда $y_1=\frac{k}{x_1}$ и $y_2=\frac{k}{x_2}$. Так как $y_1 \neq 0$ и $y_2 \neq 0$, то можем записать $\frac{y_2}{y_1}=\frac{k}{x_2}:\frac{k}{x_1}=\frac{kx_1}{kx_2}=\frac{x_1}{x_2}$. Итак, $\frac{y_2}{y_1}=\frac{x_1}{x_2}$.

Установленное свойство называют *основным свойством обратной пропорциональности*.

Если значениями переменных x и y являются положительные числа, то основное свойство можно сформулировать так: во сколько раз увеличивается (уменьшается) значение переменной x, во столько же раз уменьшается (увеличивается) значение переменной y.

Областью определения функции $y=\frac{k}{x}$ является множество действительных чисел R, отличных от нуля, то есть множество $R\setminus\{0\}$.

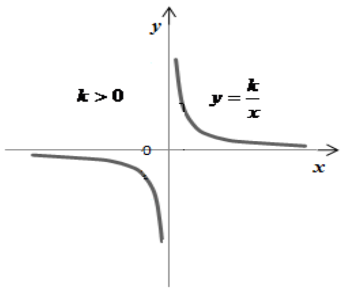
Определим *свойства* данной функции.

Поскольку область определения функции симметрична относительно нуля и $f(-x)=\frac{k}{-x}=-\frac{k}{x}=-f(x)$, то функция $y=\frac{k}{x}$ является нечетной. Поэтому для построения графика данной функции достаточно исследовать его поведение при x > 0, а затем воспользоваться симметричностью относительно начала координат.

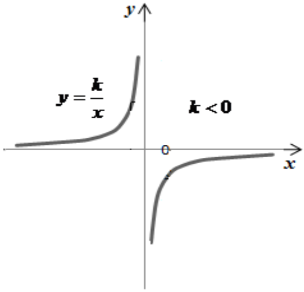
Пусть x_1 и x_2 – два различных значения переменной x, где $0 < x_1 < x_2$. Сравним $y_1 = \frac{k}{x_1}$ и $y_2 = \frac{k}{x_2}$. Для этого рассмотрим разность $y_2 - y_1 = \frac{k}{x_2} - \frac{k}{x_1} = \frac{kx_1 - kx_2}{x_2 \cdot x_1} = \frac{k(x_1 - x_2)}{x_2 \cdot x_1}$.

Так как по условию $x_2 - x_1 > 0$, то знак разности $y_2 - y_1$ зависит от знака коэффициента k.

Пусть $k > 0$, тогда из равенства $y_2 - y_1 = \frac{k(x_1 - x_2)}{x_2 \cdot x_1}$ следует, что $y_2 - y_1 < 0$, то есть из того, что $x_2 > x_1 \Rightarrow y_2 < y_1$, а значит, функция $y = \frac{k}{x}$ монотонно убывает на всем промежутке $(0;+\infty)$.



Пусть $k < 0$, тогда из равенства $y_2 - y_1 = \frac{k(x_1 - x_2)}{x_2 \cdot x_1}$ следует, что $y_2 - y_1 > 0$, то есть из того, что $x_2 > x_1 \Rightarrow y_2 > y_1$, а значит, функция $y = \frac{k}{x}$ монотонно возрастает на всем промежутке $(0;+\infty)$.



Графиком функции, заданной уравнением $y=\frac{k}{x}$ является *гипербола*. При $k > 0$ ее ветви находятся в первой и третьей четвертях, а при $k < 0$ во второй и четвертой.

Когда значение переменной (величины) x стремится к бесконечности, кривая $y=\frac{k}{x}$ неограниченно приближается к оси абсцисс, однако не достигает ее. Говорят, что ось абсцисс – *горизонтальная асимптота* этой кривой.

Когда значение переменной (величины) x стремится к нулю, кривая $y=\frac{k}{x}$ неограниченно приближается к оси ординат, однако не достигает ее. Говорят, что ось ординат – *вертикальная асимптота* этой кривой.

С обратной пропорциональностью учащиеся начальной школы также встречаются при решении текстовых задач. Знание зависимости между величинами часто облегчает процесс решения задачи, позволяет находить новые способы решения и контролировать правильность найденного ответа.

Квадратичная функция. Квадратичная функция довольно подробно изучается в курсе математики средней школы.

Рассмотрим свойства квадратичной функции и проанализируем на ее примере основные моменты, связанные с преобразованием графиков любых функций.

Определение. *Квадратичной функцией* называется функция, которую можно задать при помощи формулы вида

$y = ax^2 + bx + c$, где x – независимая переменная, a, b, c – действительные числа, причем $a \neq 0$.

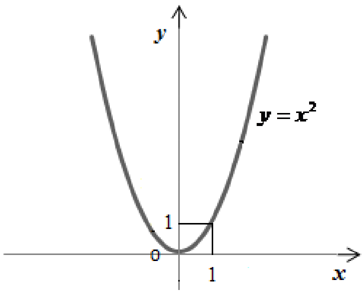
Построение графика квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ разобьем на несколько этапов, постепенно усложняя вид функции.

1) $y = x^2$. Данная функция определена на множестве всех действительных чисел R. Данная функция является четной, так как $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$, следовательно, ее график симметричен относительно оси ординат.

Исследуя функцию на промежутке $(0;+\infty)$. Так как $0 \le x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, следовательно, функция возрастает на промежутке $(0;+\infty)$

Если $x = 0$, то $f(0) = 0^2 = 0$, значит, график функции проходит через начало координат.

Определение 2. График функции $y = x^2$ носит название *параболы* и имеет вид, изображенный на рисунке.



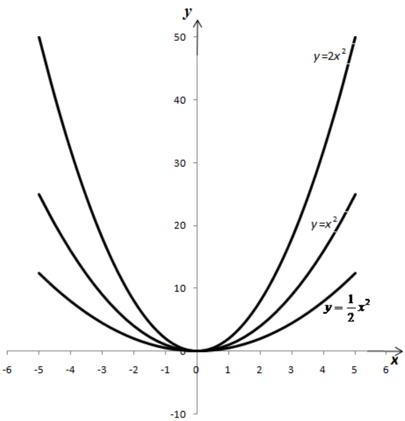
Определение 3. Точка пересечения параболы с ее осью симметрии называется *вершиной параболы*. Для параболы $y = x^2$ вершиной является начало координат.

2) $y = ax^2$, где $a \neq 0$ действительное число. Построим на одном чертеже графики функций: $y = 2x^2$, $y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$. При построении замечаем, что для одних и тех же x значений функции $y = 2x^2$ в два раза больше значений функции $y = x^2$. Следова-

тельно, для построения графика функции $y = 2x^2$ достаточно увеличить каждую ординату функции $y = x^2$ в два раза. В этом случае говорят, что мы произвели растяжение графика $y = x^2$ в два раза вдоль оси ординат.

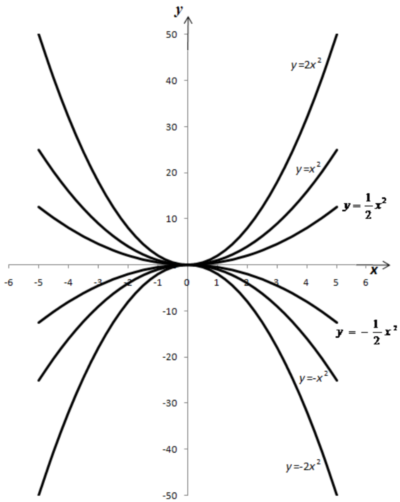
Для построения графика функции $y = \frac{1}{2}x^2$, наоборот достаточно уменьшить каждую ординату функции $y = x^2$ в два раза, таким образом, производят сжатие графика функции $y = x^2$ вдоль оси ординат в два раза.

Таким образом, при построении графика функции $y = ax^2$ при $a > 1$ производят растяжение графика $y = x^2$ в a раз вдоль оси ординат. При построении графика функции $y = ax^2$ при $0 < a < 1$ производят сжатие графика $y = x^2$ в $\frac{1}{a}$ раз вдоль оси ординат.



Построим графики функций $y = -2x^2$, $y = -x^2$, $y = -\frac{1}{2}x^2$.

При построении замечаем, что при одних и тех же x значения функций $y = -2x^2$, $y = -x^2$, $y = -\frac{1}{2}x^2$ равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку соответственно значениям функций $y = 2x^2$, $y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$.



Следовательно, графики функций $y = -2x^2$, $y = -x^2$, $y=-\frac{1}{2}x^2$ симметричны соответствующим графикам $y = 2x^2$, $y = x^2$, $y=\frac{1}{2}x^2$ относительно оси ординат.

Таким образом, график функции $y = ax^2$ при $a < 0$ тоже является параболой, но ее ветви направлены не вверх, а вниз.

Рассмотренный прием построения графика функции $y = ax^2$ может быть применен к любой функции вида $y = af(x)$, где $a \neq 0,\ a \in R$.

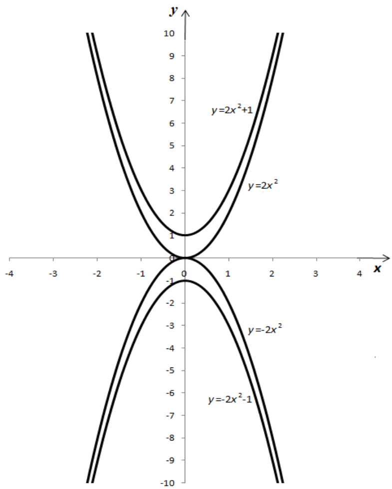
Для того чтобы из графика функции $y = f(x)$ получить график функции $y = af(x)$ надо растянуть график функции $y = f(x)$ в a раз вдоль оси ординат, если $a > 1$, и сжать в $\frac{1}{a}$ раз вдоль той же оси, если $0 < a < 1$.

Если $a < 0$, то из графика функции $y = f(x)$ получаем график функции $y=|a|\cdot f(x)$ описанным выше способом, а затем, используя симметрию относительно оси абсцисс, получаем график функции $y=(-1)\cdot|a|\cdot f(x)=a\cdot f(x)$.

3) $y = ax^2 + n$, где $a \neq 0$ и $n \neq 0$ действительные числа. Сравним рассматриваемую функцию с функцией $y = ax^2$. Замечаем, что для одних и тех же x значения функции $y = ax^2 + n$ получаются из значений функции $y = ax^2$ прибавлением одного и того же числа n. Следовательно, для построения графика функции $y = ax^2 + n$ достаточно каждую точку графика функции $y = ax^2$ сдвинуть (перенести) на $|n|$ единиц вверх (если $n > 0$) или вниз (если $n < 0$), в зависимости от знака n.

Таким образом, график функции $y = ax^2 + n$ представляет собой такую же параболу, как и $y = ax^2$, но сдвинутую вдоль оси ординат.

Парабола $y = ax^2 + n$ также симметрична относительно оси ординат, вершиной ее является точка с координатами (0; a).



Рассмотренный прием построения графика функции $y = ax^2 + n$ может быть применен к любой функции вида $y = a \cdot f(x) + n$, где $a \neq 0, \;\; n \neq 0, \;\; a, n \in R$.

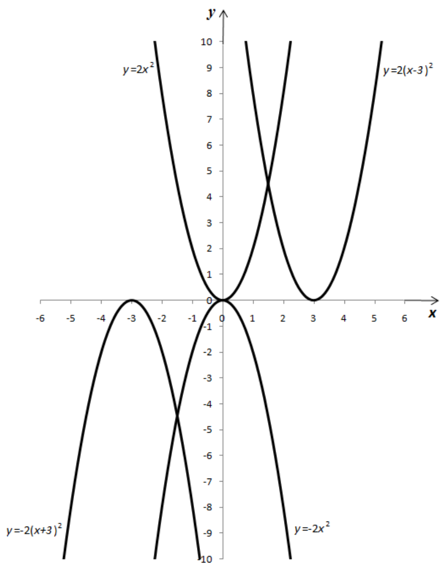
Для того чтобы из графика функции $y = af(x)$ получить график функции $y = af(x) + n$ надо произвести сдвиг (перенос) графика функции $y = af(x)$ на $|n|$ единиц вверх вдоль оси ординат, если $n > 0$, или вниз вдоль той же оси, если $n < 0$.

4) $y = a(x-m)^2$, где $a \neq 0$ и $m \neq 0$ действительные числа. Сравним рассматриваемую функцию с функцией $y = ax^2$. Замечаем, что значения функции $y = a(x - m)^2$ при $x = x_0+m$ совпадают со значениями функции $y = ax^2$ при $x = x_0$. Геометрически это означает, что точка с абсциссой $x = x_0+m$ на графике функции $y = a(x - m)^2$ имеет ту же ординату, что и точка с абсциссой $x = x_0$ на графике функции $y = ax^2$.

Следовательно, для построения графика функции $y = a(x - m)^2$ достаточно каждую точку графика функции $y = ax^2$ сдвинуть (перенести) на $|m|$ единиц вдоль оси абсцисс вправо (если $m > 0$) или влево (если $m < 0$), в зависимости от знака m.

Таким образом, график функции $y = a(x - m)^2$ представляет собой такую же параболу, как и $y = ax^2$, но сдвинутую вдоль оси абсцисс.

Парабола $y = a(x - m)^2$ симметрична относительно прямой $x = m$, параллельной оси ординат, вершиной ее является точка с координатами $(m; 0)$.



Рассмотренный прием построения графика функции $y = a\cdot(x - m)^2$ может быть применен к любой функции вида $y = a\cdot f(x - m)$, где $a \neq 0$, $m \neq 0$, $a, m \in R$.

Для того чтобы из графика функции $y = a\cdot f(x)$ получить график функции $y = a\cdot f(x - m)$ надо произвести сдвиг (перенос) графика функции $y = a\cdot f(x)$ на $|m|$ единиц вправо вдоль оси абсцисс, если $m > 0$, или влево вдоль той же оси, если $m < 0$.

5) $y = a\cdot(x - m)^2 + n$, где $a \neq 0$, $n \neq 0$ и $m \neq 0$ – действительные числа. Используя рассуждения, приведенные при построении графиков функций $y = ax^2 + n$ и $y = a\cdot(x - m)^2$, заметим, что графиком функции $y = a\cdot(x - m)^2 + n$ является такая же парабола, как $y = ax^2$, но сдвинутая на $|m|$ единиц вправо вдоль оси абсцисс, если $m > 0$, или влево вдоль той же оси, если $m < 0$, и на $|n|$ единиц вверх вдоль оси ординат, если $n > 0$, или вниз вдоль той же оси, если $n < 0$.

Следовательно, для построения графика функции $y = a\ (x - m)^2 + n$ достаточно каждую точку графика функции $y = ax^2$ сдвинуть (перенести) на $|m|$ единиц вдоль оси абсцисс вправо (если $m > 0$) или влево (если $m < 0$) и на $|n|$ единиц вдоль оси ординат вверх (если $n > 0$) или вниз (если $n < 0$).

Парабола $y = a(x - m)^2 + n$ симметрична относительно прямой $x = m$, параллельной оси ординат, вершиной ее является точка с координатами $(m; n)$.

Рассмотренный прием построения графика функции $y = a\cdot(x - m)^2+n$ может быть применен к любой функции вида $y = af(x - m)+n$, где $a \neq 0$, $n \neq 0$, $m \neq 0$, $a, n, m \in R$.

Для того чтобы из графика функции $y = a\cdot f(x)$ получить график функции $y = af(x - m) + n$ надо произвести сдвиг (перенос) графика функции $y = a\ f(x)$ на $|m|$ единиц вдоль оси абсцисс вправо (если $m > 0$) или влево (если $m < 0$) и на $|n|$ единиц вдоль оси ординат вверх (если $n > 0$) или вниз (если $n < 0$).

6) $y = ax^2+bx+c$, где $a \neq 0$ и a, b, c – действительные числа. Чтобы построить данную функцию, необходимо привести ее к виду $y = a\cdot(x - m)^2+n$ и применить преобразования, описанные в пункте 5.

Для этого к выражению, стоящему в правой части уравнения $y = ax^2+bx+c$, применим прием выделения полного квадрата.

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x^2 + 2x\cdot\frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c =$$

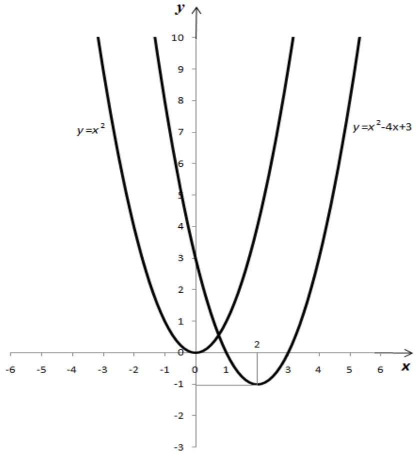
$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c =$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Итак, $y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$. Таким образом, квадратичная функция общего вида сведена к предыдущему случаю, то есть к виду $y = a(x - m)^2 + n$, где $m = -\frac{b}{2a}$, $n = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

Следовательно, графиком функции $y = ax^2+bx+c$ является такая же парабола, как $y = ax^2$, но сдвинутая на $\left|\frac{b}{2a}\right|$ единиц вдоль оси абсцисс вправо (если $\frac{b}{2a} < 0$) или влево (если $\frac{b}{2a} > 0$) и на $\left|\frac{4ac - b^2}{4a}\right|$ единиц вдоль оси ординат вверх (если $\frac{4ac - b^2}{4a} > 0$) или вниз (если $\frac{4ac - b^2}{4a} < 0$).

Парабола $y = ax^2+bx+c$ симметрична относительно прямой $x = -\frac{b}{2a}$, параллельной оси ординат, вершиной ее является точка с координатами $\left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$. На рисунке изображена парабола $y = x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 1$, полученная из параболы $y = x^2$.



ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Приведите примеры упражнений из учебников математики для начальных классов или из пособий ДОУ, при выполнении которых можно осуществлять пропедевтику понятия функции.

2. Находится ли площадь квадрата S в функциональной зависимости от длины его стороны x? От длины его диагонали d? От его периметра P? Ответ обоснуйте.

3. Находится ли периметр квадрата P в функциональной зависимости от длины его стороны x? А от длины его диагонали d? Ответ обоснуйте.

4. Найдите значение k и постройте график функции $y = \dfrac{k}{2x}$, если известно, что он проходит через точку (–4; 1). Каким координатным четвертям он принадлежит? Назовите асимтоты этой кривой. Перечислите свойства данной функции.

5. Установите вид зависимости переменной y от переменной x, если

   а) x – длина стороны квадрата, y – его периметр;
   б) x – радиус круга, y – его площадь;
   в) x – радиус окружности, y – ее длина;

г) x – мерка, y – результат измерения длины отрезка данной меркой;

д) x – площадь круга, y – его радиус.

6. Используя понятия прямо пропорциональной и обратно пропорциональной зависимостей, обоснуйте способы решения ниже приведенных задач.

а) На изготовление 3 сарафанов необходимо 10 м ситца. Сколько таких же сарафанов можно сшить из 70 м ситца?

б) Из каждой тонны картофеля получается 120 кг. Крахмала. Сколько килограммов крахмала получиться из 7 центнеров картофеля?

в) Велосипедист проехал расстояние от села до железнодорожной станции за 1 час 30 минут. За сколько минут можно преодолеть это же расстояние на автомобиле, если его скорость в 6 раз больше скорости велосипедиста?

г) На расстояние между двумя пристанями лодка против течения затрачивает 4 часа. Сколько времени займет обратный путь, если по течению лодка плывет вдвое быстрее?

д) За 5 часов часы отстали на 15 секунд. На сколько минут отстанут часы за сутки? За неделю?

е) Трое рабочих могут выполнить заказ за 60 часов. За сколько часов выполнят такой же заказ двенадцать рабочих, если их производительность одинакова?

7. Решите следующие задачи различными способами:

а) На 7 автомашинах доставили 49 т зерна. Сколько машин такой же грузоподъемностью потребуется для доставки оставшихся 210 т зерна?

б) Две автомашины одновременно выехали из разных городов навстречу друг другу. Одна за каждые 3 часа преодолевала 180 километров, а другая – 260 километров за 4 часа. Какое расстояние проехала до встречи каждая машина, если они встретились через 8 часов?

в) Швейная фабрика предполагала сшить некоторое количество халатов за 10 дней. Однако оказалось, что необходимо сшить на 236 халатов больше. Сколько халатов необходимо было сшить первоначально, если на выполнение увеличенного заказа потребовалось затратить на 4 дня больше, чем предполагалось?

г) Одна труба наполняет бассейн за 5 часов. За какое время наполнят бассейн три таких же трубы?

д) Токарь должен был изготовить некоторое количество деталей за 10 дней. Ежедневно перевыполняя норму на 15 деталей, токарь за 2 дня до срока не только выполнил план, но и сделал сверх нормы 60 деталей. Сколько всего деталей изготовил рабочий?

8. Для каждой из следующих функций укажите область определения:

а) $y = \dfrac{2}{x^2}$; б) $y = \dfrac{2x}{25 + x^2}$;

в) $y = \dfrac{2}{\sqrt{(x-3)^2}}$; г) $y = \sqrt{4 - x^2}$;

д) $y = \sqrt{\dfrac{x-4}{x^2 - 25}}$; е) $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 4x}{x^2 + 5x}}$;

ё) $y = \sqrt{-x^2 + x + 6}$; ж) $y = \sqrt{2x^2 + x + 8}$;

з) $y = \sqrt{2x^3 + 6x^2 - 8x}$.

9. Для каждой из следующих функций укажите множество значений:

а) $y = \dfrac{2}{x}$; б) $y = \dfrac{2}{25 + x^2}$;

в) $y = \dfrac{2}{\sqrt{(x-3)^2}}$; г) $y = \sqrt{4 - x^2}$;

д) $y = 2 + \sqrt{2x^2 + x + 8}$; е) $y = 5 - \sqrt{2x^2 + x + 8}$.

10. Исследуйте на четность и нечетность функции:

а) $y = -5x$; б) $y = 7x + 3$;

в) $y = \dfrac{2}{x}$; г) $y = x^2 - 25$;

д) $y = x^3 - x$;

е) $y = x^4 - x$;

ё) $y = \dfrac{2x}{x^2}$;

ж) $y = |x| + 3$;

з) $y = \dfrac{x^4 - 9}{x^2 - 1}$;

и) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$;

к) $y = \dfrac{x - 1}{x^2 + 1}$.

л) $y = \sqrt{-x^2 + x + 6}$.

11.Постройте графики следующих функций:

а) $y = -5$;

б) $x = 2$;

в) $y = -5x + 2$;

г) $y = \dfrac{1}{2}x - 3$;

д) $y = \dfrac{1}{x - 3}$;

е) $y = \dfrac{1}{x - 3} + 2$;

ё) $y = -4 - \dfrac{1}{x - 3}$; ж) $y = x^2 + 3$;

з) $y = 4x^2 - 1$;

и) $y = \dfrac{1}{3}x^2 + 1$;

к) $y = -2x^2 + 3$;

л) $y = (x - 2)^2 + 3$;

м) $y = -2(x + 2)^2 - 5$;

н) $y = \dfrac{1}{3}(x - 1)^2 + 1$;

о) $y = x^2 + 5x - 6$;

п) $y = -x^2 + x + 6$;

р) $y = -2x^2 - x$.

12.Постройте график функции $y = \begin{cases} -\dfrac{5}{x}, & \textit{если } x \le -1 \\ x^2 - 4x, & \textit{если } x > -1 \end{cases}$ и определите, при каком значении c прямая $y = c$ будет пересекать построенный график в трех точках.

13.Постройте график функции $y = \begin{cases} x^2, & \textit{если } |x| \le 1 \\ -\dfrac{1}{x}, & \textit{если } |x| > 1 \end{cases}$ и определите, при каком значении c прямая $y = c$ будет иметь с графиком единственную общую точку.

14.Постройте график функции $y = \dfrac{2x + 1}{2x^2 + x}$.

15.При каких значениях p прямая $y=-2x+p$ имеет с параболой $y=x^2+2x$ ровно одну общую точку? Найдите координаты этой точки. Постройте в одной системе координат данную параболу и прямую при найденном значении p.

4. ПРЕДИКАТЫ И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

Понятие предиката. В математике часто встречаются предложения, содержащие одну или несколько переменных. Например: $x > 3$, $x + y = 8$, $x + 1 = 8$. Эти предложения не являются высказываниями, так как об истинности этих предложений мы ничего не можем сказать, поскольку они содержат неизвестные числа. Но при подстановке значений переменных эти предложения обращаются в высказывания (истинные или ложные). Так, если в предложении $x > 3$ подставить $x = 5$, получим истинное высказывание $5 > 3$, при $x = 2$ оно обращается в ложное высказывание.

Уравнение $x + 1 = 8$ обратится в высказывание при любом натуральном значении x, но только при $x = 7$ это высказывание будет истинным.

Предложение «Число x делится без остатка на 7» также обращается в высказывание при любом натуральном значении x. Если вместо x подставлять числа 7, 14, 21, 28, 35 и т.д., то это высказывание будет истинным; при значениях x не кратных числу 7, – ложным.

Предложение $x + y = 8$ содержит две переменные. Оно обратится в высказывание при подстановке вместо переменных пар натуральных чисел. Например, если $x = 5$, $y = 3$, то получим истинное высказывание $5 + 3 = 8$; если $x = 3$, $y = 15$, то ложное $3 + 15 = 8$.

Определение 1. Предложение, содержащее одну или несколько переменных и которое при конкретных значениях переменных является высказыванием, называется *высказывательной формой или предикатом.*

В зависимости от числа переменных, входящих в предложение, различают одноместные, двухместные, трехместные и т.д. предикаты, обозначаемые соответственно: $A(x)$, $B(x, y)$, $C(x, y, z)$. Например, $x < 8$ – одноместный предикат, а $x^2 + y^2 = 50$ – двухместный предикат.

Понятие предиката можно рассматривать как обобщение известных понятий: уравнения с одной, двумя и т. д. переменными, неравенства с переменными и др.

Если задан некоторый предикат, то с ним связаны два множества:

Определение 2. *Множество (область) определения* X, состоящее из всех значений переменных, при подстановке которых в предикат последний обращается в высказывание. При задании предиката обычно указывают его область определения.

Определение 3. *Множество истинности* T, состоящее из всех тех значений переменных, при подстановке которых в предикат получается истинное высказывание.

Множество истинности предиката всегда является подмножеством его области определения, то есть $T \subset X$.

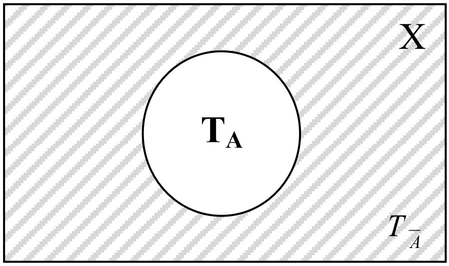
Например, областью определения X предиката «Число x делится на 7» является множество всех натуральных чисел, т. е. X = N, а множество истинности T есть множество всех натуральных чисел, кратных 7, т.е. T = {7, 14, 21, 18, 35, …, 7n …}, $n \in N$.

Операции над предикатами. Над предикатами можно совершать те же операции, что и над высказываниями.

Отрицание. Определение. *Отрицанием* предиката A(x), заданного на множестве X, называется предикат $\overline{A(x)}$, истинный при тех значениях $x \in X$, при которых предикат A(x) обращается в ложное высказывание, и наоборот.

Из данного определения следует, что предикаты A(x) и B(x) не являются отрицаниями друг друга, если найдется хотя бы одно значение $x \in X$, при котором предикаты A(x) и B(x) обращаются в высказывания с одинаковыми значениями истинности.

Множество истинности предиката $\overline{A(x)}$ является дополнением к множеству истинности предиката A(x). Обозначим через T_A множество истинности предиката A(x), а через T – множество истинности предиката $\overline{A(x)}$. Тогда $T_{\overline{A}} = \overline{T_A}$.

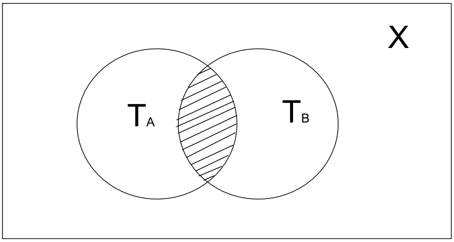


Например, рассмотрим на множестве X = {–2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, …,9} предикат A(x): «x – натуральное число». Его отрицанием является предикат $\overline{A(x)}$, областью определения которого является то же множество X и который истинен для тех и только тех x из множества X, для которых предикат A(x) ложен. Отрицанием данного предиката является предикат $\overline{A(x)}$: «x – не натуральное число».

Множество истинности его состоит из чисел -2, -1, 0. Эти числа образуют множество, являющееся дополнением к множеству истинности предиката A(x) в множестве X. T_A ={1, 2, 3, 4, 5, …, 9}. Следовательно, множество истинности предиката $\overline{A(x)}$ имеет вид: $T_{\overline{A}}$ = {–2, –1, 0}.

Конъюнкция. Определение. *Конъюнкцией* предикатов A(x) и B(x), заданных на множестве X, называется предикат A(x) $\wedge$ B(x), обращающийся в истинное высказывание при тех и только тех значениях $x \in$ X, при которых оба предиката обращаются в истинные высказывания.

Множество истинности конъюнкции предикатов есть пересечение множеств истинности предиката A(x) $\wedge$ B(x). Если обозначить множество истинности предиката A(x) через T_A, а множество истинности предиката B(x) через T_B и множество истинности предиката A(x) $\wedge$ B(x) через $T_{A \wedge B}$, то $T_{A \wedge B} = T_A \cap T_B$

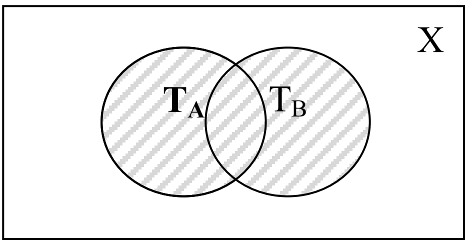


Так, если на множестве X ={1, 2, 3, 4, …, 11, 12} заданы предикаты: A(*x*): «Число *x* простое» и B(*x*): «Число *x* меньше 6», то конъюнкцией этих предикатов является предикат $A(x) \wedge B(x)$: «Число x простое и меньше 6», $x \in X$.

Множеством истинности предиката A(*x*) является множество T_A = {2, 3, 5, 7, 11}, множеством истинности предиката B(*x*) – множество T_B = {1, 2, 3, 4, 5}. Предикат «Число x простое и меньше 6» обращается в истинное высказывание при *x* =2, *x* = 3, *x* = 5. Значит, множество его истинности есть множество $T_{A \wedge B} = T_A \cap T_B$ = {2, 3, 5, 7, 11} $\cap$ {1, 2, 3, 4, 5} = {2, 3, 5}.

Дизъюнкция. Определение. *Дизъюнкцией* предикатов A(*x)* и B(*x*), заданных на множестве X, называется предикат $A(x) \vee B(x)$, обращающийся в истинное высказывание при тех и только тех значениях $x \in X$, при которых хотя бы один из предикатов обратился в истинное высказывание.

Множество истинности дизъюнкции предикатов есть объединение множеств истинности образующих ее предикатов, т.е. $T_{A \vee B} = T_A \cup T_B$.



Пусть, например, на множестве X = {1, 2, 3, …, 10} заданы предикаты A(*x*): «Число x является делителем числа 60» и

B(x): «(x + 12)(x – 3) = 0». Дизъюнкцией этих предикатов является предикат A(x)$\vee$B(x): «Число x является делителем числа 60 или (x + 12)(x – 3) = 0». Множеством истинности предиката A(x) является множество T_A = {1, 2, 3, 4, 6}, а множество истинности T_B предиката B(x) состоит из чисел -12 и 3, которые являются корнями уравнения (x + 12)(x – 3) = 0. Множество истинности предиката A(x)$\vee$B(x) является множество $T_{A\vee B} = T_A \cup T_B$ = {1, 2, 3, 4, 6}$\cup$ {–12, 3}= {–12, 1, 2, 3, 4, }.

Используя операции отрицания, конъюнкции и дизъюнкции предикатов, можно строить различные составные предикаты, как, например: $\overline{A(x)\wedge B(x)\vee C(x)}$, $A(x)\vee C(x)\wedge\overline{B(x)}$ и т.д. Например, на множестве X = {–2, –1, 0, 1, 2, …, 10} заданы предикаты A(x): «2x – 1 < 3» и B(x): «x + 2x = 0». Образуем предикат вида $A(x)\wedge\overline{B(x)}$. В нашем примере его словесное выражение таково: «2x – 1 < 3 и неверно, что x + 2x = 0».

Найдем множество истинности этого составного предиката. Для этого:

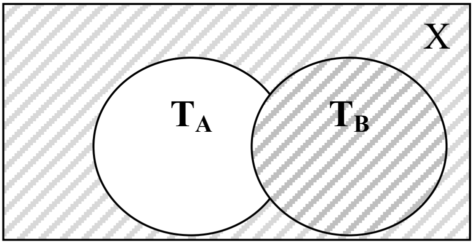
1.Находим множество истинности предикатов A(x) и B(x). Имеем соответственно, что T_A = {–2, –1, 0, 1},а T_B = {0}.

2.Находим множество истинности предиката $\overline{B(x)}$, который является отрицанием предиката B(x) и, следовательно, его множество истинности является дополнением к множеству {0} в множестве X. Таким образом, $T_{\overline{B}}$ = {–2, –1, 1, 2, 3, …, 10}.

3.Находим множество истинности конъюнкции предикатов A(x) и $\overline{B(x)}$, являющееся пересечением T_A и $T_{\overline{B}}$. Имеем, что $T_{A\wedge\overline{B}} = T_A \cap T_{\overline{B}}$ = {–2. –1, 0, 1}$\cap$ {–2, –1, 1, 2, 3, …, 10} = {–2, –1, 1}.

Импликация. Определение. *Импликацией* предикатов A(x) и B(x), заданных на множестве X, называется предикат A(x)$\Rightarrow$B(x), который ложен при тех и только тех значениях переменной, при которых первый предикат обращается в истинное высказывание, а второй – в ложное.

Множество истинности импликации предикатов есть объединение множества истинности предиката B(x) с дополнением к множеству истинности предиката A(x), т.е. $T_{A\Rightarrow B} = \overline{T_A} \cup T_B$



Рассмотрим примеры импликаций предикатов.

Пример 1. На множестве X = {1, 2, 3, …., 10} зададим предикат A(x): «Число x кратно 3» и предикат «Число x четно». Тогда предикат $A(x) \Rightarrow B(x)$ имеет смысл: «Если число x кратно 3, то оно четно». Найдем множество истинности этого предиката. Обозначим через T_A множество истинности предиката A(x), а через T_B – множество истинности предиката B(x). T_A = {3. 6. 9}, T_B = {2, 4, 6, 8, 10}.

Пользуясь определением импликации, выясняем, что предикат «Если число x кратно 3, то оно четно» обращается в ложное высказывание при x =3 или x = 9. При всех других значениях x из множества X импликация истинна.

Таким образом, множество $T_{A \Rightarrow B}$ = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10} является множеством истинности импликации «Если число x кратно 3, то оно четно», определенной на множестве X.

Пример 2. На множестве X = {1, 2, 3, …, 10, 11, 12} рассмотрим предикат A(x): «Число x кратно 6» и предикат B(x): «Число x четно». Тогда импликация такова: «Если число x кратно 6, то оно четно».

Множеством истинности предиката A(x) является множество T_A = {6, 12}, а множеством истинности предиката B(x) – множество T_B = {2, 4, 6, 8, 10,12}. Замечаем, что в данном случае $T_A \subset T_B$, т.е. во всех случаях, когда истинен предикат A(x), то истинен и предикат B(x).

Подставляя значения x из множества X в предикат «Если число x кратно 6, то оно четно», убеждаемся в том, что множество истинности $T_{A \Rightarrow B}$ этого предиката совпадает с его областью определения, т.е. $T_{A \Rightarrow B}$ = X. Другими словами, предикат «Если числе x кратно 6,то оно четно» обращается в истинное высказывание при всех значениях x из множества X.

Вообще, предикат $A(x) \Rightarrow B(x)$, заданный на множестве X, может быть истинен при всех x из множества X тогда и только тогда, когда множество истинности T_A предиката $A(x)$ является подмножеством множества истинности T_B предиката B(x), т.е. $T_A \subset T_B$.

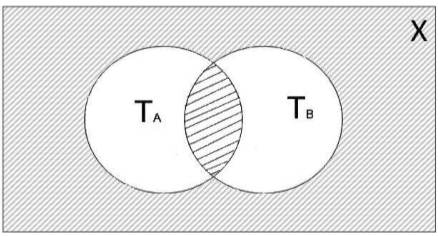
В школьном курсе математики чаще всего рассматривают импликации, истинные при всех x из области их определения. Например, теорема «Если четырехугольник – прямоугольник, то диагонали в нем равны» представляет собой импликацию, в которой предикат «диагонали в четырехугольнике равны» следует из предиката «четырехугольник – прямоугольник».

В начальной школе рассматривают различные импликации, определенные на множестве натуральных чисел: «Если $a > b$, то $b < a$»; «Если $a \cdot b = c$, то $a = c : b$», «Если $a - b = c$, то $a = b + c$», «Если $a + b = c$, то $a = c - b$» и т. д.

Эквиваленция. Определение. *Эквиваленцией* предикатов $A(x)$ и $B(x)$, заданных на множестве X, называется предикат $A(x) \Leftrightarrow B(x)$, который обращается в истинное высказывание при всех тех и только тех значениях переменной, при которых оба предиката обращаются либо в истинные высказывания, либо в ложные высказывания.

Множество истинности эквиваленции предикатов есть пересечение множества истинности предиката $A(x) \Rightarrow B(x)$ с множеством истинности предиката $B(x) \Rightarrow A(x)$.

$$T_{A \Leftrightarrow B} = T_{A \Rightarrow B} \cap T_{B \Rightarrow A}$$



Пример. Пусть заданы предикаты А(x): «натуральное число х делится на 10» и В(x): «Десятичная запись числа оканчивается цифрой 0» на множестве натуральных чисел. Тогда для всех натуральных чисел истинна эквиваленция $A(x) \Leftrightarrow B(x)$: «Натуральное число х делится на 10 тогда и только тогда, когда его десятичная запись оканчивается цифрой 0». Например, для $x = 140$ она истинна, потому что 140 делится на 10, а последняя цифра этого числа равна 0 (оба высказывания истинны), а при $x = 12$ эта эквиваленция истинна, поскольку оба ложны (12 не делится на 10, и последняя цифра этого числа не равна 0).

Кванторные операции над предикатами. Предикат можно перевести в высказывание способом подстановки и способом «навешивание квантора».

Про числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 можно сказать: а) *все* данные числа простые; б) *некоторые* из данных чисел четные.

Так как относительно этих предложений можно сказать, что они истинны или ложны, то полученные предложения – высказывания.

Если из предложения «а» убрать слово «все», а из предложения «б» – слово «некоторые», то получим следующие предикаты: «данные числа простые», «данные числа нечетные».

Определение 1. Слова «все» и «некоторые» называются *кванторами*.

Слово «квантор» латинского происхождения и означает «сколько», т. е. квантор показывает, о скольких (всех или некоторых) объектах говорится в том или ином предложении.

Различают два основных вида кванторов: квантор общности и квантор существования.

Определение 2. Термины *«всякий», «любой», «каждый» носят название – квантор всеобщности.* Обозначается $\forall$.

Пусть А(x) – определенный предикат, заданный на множестве X. Под выражением $\forall$ А(x) будем понимать высказывание истинное, когда А(x) истинно для каждого элемента из множества X, и ложное в противном случае.

Истинность высказываний с квантором общности устанавливается путем доказательства. Чтобы убедиться в ложности таких высказываний (опровергнуть их), достаточно привести контрпример.

Определим истинность высказывания: «Значение суммы любых трех последовательных натуральных чисел делится на 3». Истинность данного высказывания можно доказать следующим образом.

Обозначим последовательные натуральные числа через n, $n + 1$, $n + 2$ и докажем, что при любом n значение суммы $n + (n + 1) + (n + 2)$ делится на 3.

Выражение $n + (n + 1) + (n + 2)$ можно преобразовать к виду $n + n + 1 + n + 2 = 3n + 3 = 3(n + 1)$. Так как 3 делится на 3, то и значение произведения делится на 3. Следовательно, и значение суммы любых трех последовательных натуральных чисел делится на 3.

Высказывание: «Любой прямоугольник является квадратом» ложно. Чтобы убедиться в этом, достаточно начертить прямоугольник, не являющийся квадратом. Мы опровергли данное высказывание, приведя контрпример.

Определение 3. Термины «*существует», «найдется» носят название квантор существования.* Обозначается $\exists$.

Пусть А(x) – определенный предикат, заданный на множестве Х. Под выражением $\exists$А(x) будем понимать высказывание истинное, если существует элемент x из области Х, для которого А(x) истинно, и ложно в противоположном случае. Эту же запись можно прочитать и так: «найдется в множестве Х хотя бы один элемент x, для которого имеет место А(x).

Истинность высказывания с квантором существования устанавливается при помощи конкретного примера. Чтобы убедиться в ложности такого высказывания, необходимо провести доказательство.

Рассмотрим, например, на множестве Х всех простых чисел предикат А(x): «Число x – четное». Тогда запись $\exists(x \in X)A(x)$ означает: «существует простое число, которое четное». Имеем истинное высказывание, потому что можно указать четное число 2, такое, что высказывание А(2): «Число 2 – четное» будет истинным.

Определим истинность высказывания «Существуют равносторонние прямоугольные треугольники». Данное высказывание ложное. Действительно, в прямоугольном треугольнике один угол обязательно содержит 90°, а в равностороннем треугольнике величина всех углов 60°, значит, среди прямоугольных треугольников равносторонних нет.

Форму высказывания с квантором имеют многие математические предложения, например:

- все прямоугольники являются параллелограммами;
- некоторые числа делятся на 5;
- в любом треугольнике сумма внутренних углов равна 180°.

Часто в высказываниях квантор опускается; например, переместительный закон умножения чисел записывают в виде равенства $a \cdot b = b \cdot a$, которое означает, что для любых чисел a и b справедливо равенство $a \cdot b = b \cdot a$, то есть переместительный закон умножения есть высказывание с квантором.

Приписывание спереди к предикату квантора общности или существования называется *операцией навешивания квантора* или связывания квантором, а переменная, которая «связывается» квантором (которая фигурирует и в предикате, и в кванторе), называется связанной переменной. Переменная, не связанная ни каким квантором, называется свободной.

Правила построения отрицаний высказываний, содержащих кванторы. Между кванторами $\forall$ и $\exists$ имеет место отношения равносильности, позволяющие сводить любой из этих кванторов к другому. Рассмотрим эти отношения равносильности.

Пусть А(x) – некоторый предикат, заданный на множестве X. Тогда отрицание высказывания $(\forall x)A(x)$ можно образовать двумя способами:

1) $\overline{(\forall x)A(x)}$, то есть не имеет места утверждение о том, что для любого x выполняется А(x);

2) $\overline{(\forall x)A(x)}$, тогда знак общности $\forall$ нужно заменить знаком существования, то есть найдется в множестве А такой элемент x, для которого не выполняется А(x).

Следовательно, верно равенство: $\overline{(\forall x)A(x)} = (\exists x)\overline{A(x)}$.

Пусть А(x) – некоторый предикат, заданный на множестве X. Тогда отрицание высказывания $\overline{(\exists x)A(x)}$ можно образовать двумя способами:

1) $\overline{(\exists x)A(x)}$,то есть не имеет место утверждения о том, что существует x в множестве X для которого выполняется А(x);

2) $\overline{(\exists x)A(x)}$,но тогда знак существования нужно заменить знаком общности, то есть для любого x не выполняется А(x).

Следовательно, верно равенство: $\overline{(\exists x)A(x)} = (\forall x)\overline{A(x)}$.

При построении отрицаний высказываний можно пользоваться правилом, которое принимаем без доказательства.

Правило. *Отрицание высказывания с квантором (общности или существования) может быть построено двумя способами:*

1) *перед данным высказыванием ставятся слова «неверно, что»*;

2) *квантор общности (существования) заменяется квантором существования (общности), а предложение, стоящее после квантора, заменяют его отрицанием*.

Сформулированное правило является достаточным для правильного построения отрицания высказываний с кванторами.

Пример 1. Построить отрицание высказывания: «Существует натуральное число, являющееся решением неравенства $2x + 6 < 2$».

Отрицание данного высказывания можно построить двумя способами:

1) неверно, что существует натуральное число, являющееся решением неравенства $2x + 6 < 2$;

2) любое натуральное число не является решением неравенства $2x + 6 < 2$.

Пример 2. Построить отрицание высказывания: «Всякое действительное число положительно».

Отрицание данного высказывания можно построить двумя способами:

1) неверно, что всякое действительное число положительно;

2) существует действительное число, которое не является положительным.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. На множестве X = {–2, –1, 0, 1, 2, …, 10} заданы предикаты A(*x*): «*x* – отрицательное число», B(*x*): «*x* – кратно 3», C(x): «*x* – четное число». Найдите множество истинности предикатов $A(x) \vee B(x) \wedge C(x)$ и $\overline{A(x)} \wedge B(x)$; изобразите множество истинности этих предикатов на кругах Эйлера-Венна.

2. На множестве X = {–2, –1, 0, 1, 2, …, 9} заданы предикаты A(*x*): «*x* – натуральное число», B(*x*): «*x* кратно 3». Найдите множество истинности предикатов $A(x) \vee \overline{B(x)}$ и $\overline{A(x) \wedge B(x)}$; изобразите их при помощи кругов Эйлера-Венна.

3. На множестве X = {2, 3, 4, ….   , 20} заданы предикаты B(*x*): «*x*– четное число», C(*x*): «*x* – простое число». Найдите множество истинности предикатов $\overline{B(x)} \wedge C(x)$ и $B(x) \vee C(x)$; изобразите их при помощи кругов Эйлера-Венна.

4. На множестве X = {–2, –1, 0, 1, 2, …, 9} заданы предикаты A(*x*): «*x* – натуральное число», B(*x*): «x кратно 3». Найдите множество истинности предикатов $A(x) \vee \overline{B(x)}$ и $\overline{A(x) \wedge B(x)}$; изобразите их при помощи кругов Эйлера-Венна.

5. На множестве X = {1, 2, 3, …, 20} заданы предикаты K(*x*): «*x* – однозначное число», M(*x*): «*x* – четное число» P(*x*): «Десятичная запись числа *x* оканчивается цифрой 7». Найдите множество истинности предикатов $K(x) \wedge M(x) \wedge P(x)$ и $\overline{M(x)} \vee P(9x)$; изобразите их при помощи кругов Эйлера-Венна.

6. На множестве геометрических фигур заданы предикаты:

A(*x*): фигура *x* – треугольник,

B(*x*): фигура *x* – четырехугольник,

С(x): фигура x – имеет прямой угол,

Д(x): в фигуре x все углы прямые.

Сформулируйте следующие предикаты и изобразите их множества истинности на кругах Эйлера-Венна:

а) $A(x) \to Д(x)$; б) $A(x) \to C(x)$;

в) $A(x) \to \overline{B(x)}$; г) $\overline{D(x)} \to \overline{C(x)}$;

д) $A(x) \wedge C(x) \to \overline{Д(x)}$; е) $B(x) \wedge Д(x) \to C(x)$.

7. Среди следующих предложений укажите высказывания и найдите их значения истинности:

а) $(\forall x \in R)\ x+y=5$; б) $(\forall x \in R)(\forall y \in R)\ x+y=5$;

в) $(\exists y \in R)(\forall x \in R)$ x+y=5; г) $(\forall x \in R)(\exists y \in R)\ x+y=5$;

д) $(\exists y \in R)\ x+y=5$; е) $(\exists x \in R)(\exists y \in R)\ x+y=5$.

8. Запишите следующие высказывания:

а) все элементы множества X обладают свойством P;

б) некоторые элементы множества X обладают свойством P;

в) некоторые элементы множества X не обладают свойством P;

г) ни один элемент из множества X не обладает свойством P.

5. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ

Об алфавите математического языка. Изучая математику, мы пользуемся как предложениями русского языка, так и предложениями, образованными из математических знаков (символов), т.е. предложениями собственно математического языка. Так, 6 – 1 = 5, $8y + 7 > 9y$ являются предложениями, записанными с помощью математических символов.

Известно, что любое предложение образуется из слов, а слова – из букв алфавита. Следовательно, должен существовать и алфавит математического языка. В данный алфавит входят:

1) цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5. 6, 7, 8, 9 для записи чисел;

2) буквы латинского алфавита: $a, b, c, d, \ldots, A, B, C, \ldots, Z$ для обозначения переменных, множеств и их элементов;

3) знаки операций +, –, ·, :, $\sqrt{\ }$, $\cap$, $\cup$ и др.

4) знаки отношений (между числами, множествами, их элементами): =, >, <, $\parallel$, $\perp$ и др.

5) технические знаки: скобки (круглые, квадратные, фигурные), запятая.

Из знаков математического алфавита по определенным правилам конструируются слова и предложения. При этом слово в математике понимается так же как и в русском языке, т.е. это такая конечная последовательность (набор) букв алфавита этого языка, которая имеет смысл. Например, запись 7 – : 8 + смысла не имеет, и, значит, словом ее назвать нельзя.

Таким образом, используя данный алфавит, в алгебре образуют слова, называя их выражениями, а из слов получаются предложения – числовые равенства, числовые неравенства, уравнения, неравенства с переменными.

Исторически символика математики создавалась веками при участии многих выдающихся ученых. Так считают, что обозначение неизвестных величин буквами использовал еще Диофант (III в.), широкое применение прописных букв латинского алфавита в алгебре началось с Виета (XVI в.). Строчные буквы этого алфавита ввел для обозначения Р. Декарт (XVII в.). Знак равенства впервые появился в работах английского ученого Р. Рекорда (XVI в.), но стал он общеупотребительным только в XVIII веке. Знаки неравенства (<, >) появились в начале XVII столетия, ввел их английский математик Гариот. И хотя знаки «=», «>», «<» появились не так давно, сами понятия равенства и неравенства возникли в глубокой древности.

***Выражения и виды выражений*.**

Определение 1. Запись, состоящая из чисел, обозначенных буквами или цифрами, соединенных знаками арифметических действий, называется *выражением*.

Выражения классифицируют по нескольким основаниям.

Если за основание классификации взять *количество математических действий* в выражении, то тогда выражения делятся на элементарные, простые и составные.

Определение 2. *Элементарное выражение* – это отдельно взятое число, выраженное цифрами или буквами

Например, 15, a, 8, x и др.

Определение 3. *Простое выражение* – это выражение, которое содержит одно арифметическое действие

Например, $2 + 3$, $7a$, $\sqrt{9}$, 4^2, $a - c$ и др.

Определение 4. *Составным выражением* называется выражение, которое составлено из нескольких простых

Например, $(9 - 5) + 8$, $7x + 5$, $a - c + b$, $\sqrt{16} + 8$ и др.

Если за основание классификации взять *название арифметического действия*, то выделяются следующие выражения: сумма, разность, произведение, частное.

Определение 5. Выражение, в котором два выражения соединены знаком «+», называется *суммой*.

Определение 6. Выражения, соединенные знаком «+» называются *слагаемыми*.

Результат выполнения действия сложения называется *значением суммы*.

Определение 7. Выражение, в котором два выражения соединены знаком «–», называется *разностью*.

Определение 8. Выражение, из которого вычитают, называется *уменьшаемым*, выражение, которое вычитают, называется *вычитаемым*.

Результат выполнения действия вычитания называется *значением разности*.

Определение 9. Выражение, в котором два выражения соединены знаком «·», называется *произведением*.

Определение 10. Выражения, соединенные знаком «·» называются *множителями*.

Результат выполнения действия сложения называется *значением произведения*.

Определение 11. Выражение, в котором два выражения соединены знаком «:», называется *частное*.

Определение 12. Выражение, которое делят, называется *делимым*, выражение, на которое делят, называется *делителем*.

Результат выполнения действия сложения называется *значением частного*.

Данная классификация относится как к простым выражениям, так и к составным и позволяет правильно читать и записывать их.

Выражения составные и простые можно читать, если оно записано в книге или в тетради и записывать под диктовку. При этом используются следующие правила.

Правило чтения. *Чтобы прочесть составное выражение, достаточно определить последнее действие, а затем прочитать его по названию выражения, обозначенного этим действием.*

Пример. Прочитайте выражение: $(34 - 8) \cdot 2$.

Решение. В данном выражении последнее действие – умножение, поэтому данное выражение есть произведение двух множителей. Оно может быть прочитано так: «Произведение разности чисел 34 и 8 и числа 2».

Правило записи. *Чтобы записать составное выражение под диктовку, достаточно читать действия по порядку, называя записываемые выражения согласно их названия.*

Пример. Запишите выражение: разность чисел 34 и 8 умножить на число 2.

Решение. В данном случае нужно словесно заданное выражение перевести в знаковую форму. Первое действие – вычитание, второе – умножение. Поэтому данное выражение есть произведение двух множителей. Оно может быть записано так: $(34-8)\cdot 2$.

Если за основание классификации взять *способ обозначения чисел*, то тогда выражения делятся на числовые и буквенные.

Определение 13. *Числовыми выражениями* называются выражения, состоящие из чисел, выраженных цифрами, и знаков арифметических действий.

Например. Записи $12-4$, $24:6$, $5\cdot 6-8$, $(25+3)\cdot 2-17$ являются числовыми выражениями.

Определение 14. Число, полученное в результате последовательного выполнения действий, указанных в выражении, называется *значением числового выражения*.

Например, значение числового выражения $5\cdot 6-8$ равно 22.

Таким образом, запись $5\cdot 6-8$ является выражением, а 22 – это значение выражения.

Определение 15. Если значения двух числовых выражений совпадают, то эти *выражения равны*.

Существуют выражения, значения которых нельзя найти.

Определение 16. Выражения, значения которых нельзя найти, *не имеют смысла*.

Например, выражение $7:(2-2)$ смысла не имеет, поскольку его значение найти нельзя: $2-2=0$, а деление на нуль невозможно. Выражение $\sqrt{-4}$ также не имеет числового значения во множестве действительных чисел, так как не существует действительного числа, квадрат которого был бы равен (–4). Не имеет значения во множестве натуральных чисел и выражение $7-9$. Так как его значение –2 из множества целых чисел.

Определение 17. *Буквенными выражениями* называются выражения, состоящие из чисел, выраженных цифрами, буквами и знаков арифметических действий.

Рассмотрим запись $4b+7$. Она образована из знаков алфавита математического языка: цифр 4 и 7, знака действия сложения «+» и буквы b. Если вместо буквы b подставлять числа, то будут получаться различные числовые выражения:

если $b = 5$, то $4 \cdot 5 + 7$;

если $b = 0$, то $4 \cdot 0 + 7$;

если $b = –2$, то $4 \cdot (–2) + 7$.

В записи $4b+7$ буква b называется переменной, а сама запись $4b+7$ – выражением с переменной.

Определение 18. *Переменная* – это знак (символ), который разрешается заменять числами.

Определение 19. *Выражением с переменной* называются выражения, содержащие переменную.

Переменную можно обозначать любой буквой латинского алфавита. В начальной школе для обозначения переменной, кроме букв, используют вначале знак □.

Например, пишут 4 · □ + 7.

Определение 20. Числа, которые разрешается подставлять вместо переменной в выражение, называются *значениями переменной*, а множество таких чисел – *областью определения* данного выражения.

Что значит «разрешается»? Дело в том, что вместо переменной в выражении разрешается представлять такие ее значения, при которых получаются числовые выражения, имеющие смысл.

Рассмотрим несколько примеров.

1. В выражении $7 – 3x$ переменная x может принимать любые действительные значения, так как при любом значении x будет получаться числовое выражение, имеющее смысл. В этом случае можно сказать, что областью определения выражения $7 – 3x$ является множество R действительных чисел.

2. Если в выражении $8 : (y – 4)$ вместо y подставить число 4, то получим числовое выражение, которое не имеет смысла. Но при всех других действительных значениях переменной y будем иметь числовые выражения, имеющие смысл. Говорят, что область определения выражения – есть множество действительных чисел, кроме числа 4, т. е. множество $(– \infty, 4)\cup(4, + \infty)$.

В математике рассматриваются выражения, которые содержат одну переменную, две, три и больше переменных. Все выражения, которые были рассмотрены выше, это выражения с одной переменной. Выражение $6k + 9m$ содержит две переменные, запись $5a + (7b - 3c)$ есть выражение с тремя переменными. Для того чтобы из выражения с переменными перейти к числовому выражению, надо вместо каждой переменной подставить числа, принадлежащие области определения выражения.

Дошкольники и младшие школьники первоначально знакомятся с записями вида $3 + 1$, $5 – 2$, называя их соответственно суммой и разностью. Затем появляются числовые выражения более сложной структуры, но термины «математическое выражение» и «значение выражения» появляются уже в начальной школе, когда учащиеся производят вычисления в пределах сотни. Также в начальной школе после знакомства с умножением и делением рассматриваются числовые выражения, содержащие знаки умножения и деления. Учащиеся находят значения числовых выражений, сравнивают выражения между собой, записывают решение текстовой задачи в виде числового выражения, составляют по данным выражениям задачи. При выполнении таких заданий учащиеся неизбежно сталкиваются с выражениями, значения которых во множестве целых неотрицательных чисел найти нельзя. Например, про выражение $0 – 5$ они говорят, что его значение найти нельзя, так как нельзя из меньшего числа вычесть большее.

Работа с буквенными выражениями сводится к подстановке вместо букв их значений и вычислению значения получившегося числового выражения.

Тождественные преобразования выражений. Пусть нам даны два выражения с переменной: $3\cdot(x + 6)$ и $3x + 18$. Областью определения данных выражении является множество R действительных чисел. Сравним значения числовых выражений, которые получаются при замене переменной x ее значениями из R.

x	$3\cdot(x + 6)$	$3x+18$
0	18	18
4	30	30
–6	0	0

Из таблицы видно, что при значениях x, равных 0, 4, –6, соответственные значения данных выражений равны.

Можно показать в общем виде, что соответственные значения данных выражений будут равны при любых значениях x из множества R. Действительно, выражение $3x+18$ можно получить, если раскрыть скобки в выражении $3\cdot(x + 6)$, что возможно на основании дистрибутивного закона умножения относительно сложения, справедливого для любых действительных чисел.

Говорят, что выражения $3\cdot(x + 6)$ и $3x+18$ тождественно равны на множестве действительных чисел.

Определение 1. Два выражения называются *тождественно равными*, если при любых значениях переменных из области определения выражений их соответственные значения равны.

Определение 2. Равенство, верное при любых значениях переменных, называется *тождеством*. Тождествами считают и верные числовые равенства.

Например, тождествами являются все законы сложения и умножения действительных чисел, правила вычитания числа из суммы, суммы из числа, правило деления суммы на число и др. Тождествами являются правила действии с нулем и единицей: $a + 0 = 0 + a = a$, $a - 0 = 0 - a = 0$, $a \cdot 1 = 1\cdot a = a$, $a : 1= a$. Опираясь на эти другие общие правила, на практике устанавливают тождественность выражений, понимая тождественные преобразования данного выражения как последовательный переход от одного выражения к другому, тождественно равному ему.

Определение 3. Замена выражения другим, тождественно равным ему на некотором множестве, называется *тождественным преобразованием* данного выражения на этом множестве.

Рассмотрим пример тождественных преобразований выражения.

Задание. Разложить на множители выражение

$$ax - bx + ab - b^2.$$

Решение. Сгруппируем члены данного выражения по два (первый со вторым, третий с четвертым) – это тождественное преобразование возможно на основании ассоциативного закона сложения действительных чисел:

$$ax - bx + ab - b^2 = (ax - bx) + (ab - b^2).$$

Вынесем в полученном выражении из каждой скобки общий множитель – это тождественное преобразование возможно на основании дистрибутивного закона умножения относительно сложения: $(ax - bx) + (ab - b^2) = x(a - b) + b(a - b)$.

В полученном выражении слагаемые имеют общий множитель $(a - b)$, вынесем его за скобки – это тождественное преобразование также возможно на основании дистрибутивного закона умножения относительно сложения:

$$x(a - b) + b(a - b) = (x + b)(a - b)$$

Итак, $ax - bx + ab - b^2 = (x + b)(a - b)$.

В начальном курсе математики выполняют, как правило, тождественные преобразования только числовых выражений. Их теоретической основой являются коммутативный закон сложения, умножения и различные правила: правила прибавления суммы к числу, числа к сумме, вычитания числа из суммы и др.

Например, значение выражения $2\cdot(6 + 8)$ может быть найдено так: $2\cdot(6+8) = 2\cdot6 + 2\cdot8 = 12 + 16 = 28$, причем переход от данного выражения к тождественно равному ему выражению $2\cdot6 + 2\cdot8$ осуществляется на основе правила умножения числа на сумму (по существу, на основе дистрибутивного закона умножения относительно сложения), а далее используются правила умножения и сложения натуральных чисел.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Среди следующих записей укажите числовые выражения:

1) 42 : 5;	2) 3^2;	3) 27;
4) 32 + 14 – 2;	5) (7 + 3) : 10 + 23;	6) 3 · 2 = 2 · 3;
7) $\sqrt{4}$;	8) 27 – 4 = 20 + 3;	9) 13 – 5 < 7;
10) –132;	11) $6x$;	12) 6 > 3.

Определите вид выражения по количеству арифметических действий (элементарное, простое, составное).

2. Какие из ниже приведенных записей являются выражениями с переменными (переменной):

1) $32x$;	2) 43 · (13 – 4);
3) $21 - (x + y)$;	4) $0{,}49 + 2^3$;
5) $x + 2 < 7$;	6) $32 : a - 3$?

3. Вычислите значение числового выражения:

1) ((36 : 2 – 14) · (42 · 2 – 14) + 20) : 2;

2) (72 : 12 – (18 – 15)) : (24 : 3 – 2 · 4);

3) 16,.583 : 7,21 + 54,68 · 853,2 + 28,82·0,1) : 1,6 – 1,02;

4) $\left(5{,}05 : \dfrac{1}{40} - 2{,}8 \cdot \dfrac{5}{6}\right) \cdot 3 + 16 \cdot 0{,}1875$.

4. Установите, при каких значениях переменной не имеет смысла выражение:

1) $\dfrac{64}{5+x}$;	2) $\dfrac{44}{7-m}$;
3) $\sqrt{b+4}$;	4) $\dfrac{16}{\sqrt{x-4}}$.

5. Найдите рациональным способом значение выражения:

$$(3x-3y)^2 \cdot \frac{1}{3y^2-3x^2}, \text{ если } x = 3,\ y = 7.$$

6. Запишите решение задачи в виде выражения, а затем найдите его значение:

1) На турбазу прибыли в один день 150 туристов, на другой день 170. Чтобы совершить поход, 200 туристов разбились на группы, по 20 человек в каждой, а остальные по 15 человек в группе. Сколько получилось групп?

2) В мастерской за 5 дней сшили 2000 пододеяльников. Сколько пододеяльников сошьют в мастерской за 8 дней, если в день будут шить на 50 пододеяльников больше?

3) Слесарь обработал 6 деталей. Первую деталь он обрабатывал 18 мин, а каждую следующую на 3 мин быстрее, чем предыдущую. Сколько минут потребовалось для обработки всех деталей?

7. Является ли равенство $3\cdot(4y+2)=6+12y$ тождеством на множестве:

1) $\{-1, 2, 3\}$; 2) R?

8. Какие из следующих равенств являются тождествами на множестве действительных чисел:

1) $3p+5m=5m+3p$; 2) $x-y=y-x$;
3) $b\cdot 7=7\cdot b$; 4) $m(3+t)=3m+t$?

9. Обоснуйте каждый шаг в следующих преобразованиях:

1) $5\cdot(1-2x)+10x=5-10x+10x=5$;
2) $(a+1)(a+3)=a^2+a+3a+3=a^2+4a+3=a(a+4)+3$;
3) $234\cdot 4=(200+30+4)\cdot 4=200\cdot 4+30\cdot 4+4\cdot 4=$
$=800+120+16=936$.

10. Упростите выражение путем тождественных преобразований:

1) $3\cdot(x+4)-3x$;
2) $6\cdot(2ab-3)+2a\cdot(6b-5)$;
3) $\dfrac{x^2-5x}{x+2}:\dfrac{x^2-25}{x^2-4}$;
4) $\dfrac{x-y}{(x+y)^2}\cdot\left(\dfrac{x}{x-y}-\dfrac{x^2+y^2}{y^2-x^2}-\dfrac{x}{x+y}\right)$.

11. Найдите наиболее рациональным способом значение выражения:

1) $\dfrac{518^2-482^2}{360}$; 2) $\dfrac{87^2-39^2}{19^2-37^2}$;
3) $(\sqrt{3}+\sqrt{75})^2$; 4) $(\sqrt{5}+\sqrt{45})^2$.

12. Сравните выражения, не выполняя действий:

1) $(23+17) \cdot 4 * 23 \cdot 4+17 \cdot 4$; 2) $(33+12) \cdot 6 * 33 \cdot 6+10 \cdot 6$;
3) $(56-6) \cdot 5 * 57 \cdot 5-6 \cdot 5$; 4) $(16-7) \cdot 3 * 16 \cdot 3-9 \cdot 3$.

13.В выражении $56 - 24 : 2 + 6$ расставьте скобки так, чтобы его значение было равно: а) 50; б) 53; в) 38; г) 4; д) 22.

ЧИСЛОВЫЕ РАВЕНСТВА И НЕРАВЕНСТВА И ИХ СВОЙСТВА

Числовые равенства. Пусть a и b – два числовых выражения. Соединим их знаком равно.

Определение 1. Предложение вида $a = b$ называют *числовым равенством*.

Например, возьмем два числовых выражения 4 + 3 и 9 – 2 и соединим их знаком равенства. Получим числовое равенство 4 + 3 = 9 – 2. Это предложение истинное. Если же соединить знаком равенства выражения 4 + 3 и 9 – 3. то получим числовое равенство 4 + 3 = 9 – 3, которое ложно.

Определение 2. Таким образом, с логической точки зрения *числовое равенство – это высказывание*, которое может быть истинным или ложным.

Определение 3. Числовое равенство *истинно*, если значения числовых выражений, стоящих в левой и правой частях равенства, совпадают.

В теме «Соответствия» (Ч. 1) было отмечено, что бинарное отношение «равенство» обладает следующими свойствами:

1) рефлексивности – $(\forall a)\ a = a;$
2) симметричности $(\forall a, b)\ a = b \Rightarrow b = a;$
3) транзитивности $(\forall a, b, c)\ a = b$ и $b = c \Rightarrow a = c.$

Из того, что отношение равенства обладает этими тремя свойствами, следует, что данное отношение является отношением эквивалентности и разбивает все множество выражений на попарно непересекающиеся классы эквивалентности, такие, что в один класс входят лишь выражения с одинаковыми значениями, а два выражения, взятые из разных классов, имеют различные значения.

Свойства истинных числовых равенств.

Теорема 1. Если к обеим частям истинного числового равенства $a = b$ прибавить одно и то же числовое выражение c, имеющее смысл, то получим также истинное числовое равенство $a + c = b + c$.

Доказательство. По рефлексивности отношения равенства имеем $a = a$. Прибавим к обеим частям c, получим $a + c =$

$= a + c$. Но по условию $a = b$, следовательно, можно заменить в полученном равенстве a на b. Имеем, $a + c = b + c$, что и требовалось доказать.

Теорема 2 (обратная первой). Если из обеих частей истинного числового равенства $a + c = b + c$ вычесть одно и то же числовое выражение c, имеющее смысл, то получим также истинное числовое равенство $a = b$.

Доказательство. По условию $a + c = b + c$. По теореме 1 прибавим к обеим частям равенства $(-c)$. Получим $a + c + (-c) = b + c + (-c)$. По определению противоположного числа можно записать $a + 0 = b + 0$. По правилу сложения с нулем имеем $a = b$.

Теорема 3. Если $a = b$ и $c = d$ – верные числовые равенства, то $a + c = b + d$ тоже верное числовое равенство. (Верные числовые равенства можно почленно складывать, от этого равенство не нарушится).

Доказательство. По условию $a = b$, по теореме 1 прибавим к обеим частям верного числового равенства числовое выражение c. Получим $a + c = b + c$.

По условию $c = d$, по теореме 1 прибавим к обеим частям верного числового равенства числовое выражение b. Получим $b + c = b + d$.

По транзитивности отношения равенства имеем: если $a + c = b + c$ и $b + c = b + d$, то $a + c = b + d$. Что и требовалось доказать.

Теорема 4. Если обе части истинного числового равенства $a = b$ умножить на одно и то же числовое выражение c, имеющее смысл, то получим также истинное числовое равенство $ac = bc$.

Теорема 5. (обратная четвертой). Если обе части истинного числового равенства $ac = bc$ разделить на одно и то же числовое выражение c $(c \neq 0)$, имеющее смысл, то получим также истинное числовое равенство $a = b$.

Теорема 6. Если $a = b$ и $c = d$ – верные числовые равенства, то $ac = bd$ тоже верное числовое равенство. (Верные числовые равенства можно почленно перемножать, от этого равенство не нарушится).

Теоремы 4, 5 и 6 доказываются аналогично теоремам 1, 2 и 3.

Числовые неравенства. Пусть a и b – два числовых выражения. Соединим их знаком «>» (или «<»).

Определение 1. Предложение вида $a > b$ или $a < b$ называют *числовым неравенством*.

Например, если соединить выражения 4 + 7 и 13 – 3 знаком «>», то получим числовое неравенство $4 + 7 > 13 - 3$. Это предложение истинное. Если соединить те же выражения знаком «<», то получим ложное числовое неравенство $4 + 7 < 13 - 3$.

Определение 2. Таким образом, с логической точки зрения *числовое неравенство – это высказывание*, которое может быть истинным или ложным.

Напомним определения отношения «больше»: $(\forall\ a, b)\ a > b$, если $a - b > 0$ отношения «меньше»: $(\forall\ a, b)\ a < b$, если $a - b < 0$.

Определение 3. Неравенства $a > b$ и $c > d$, называются *неравенствами одинакового смысла*.

Определение 4. Неравенства $a > b$ и $c < d$, называются *неравенствами разного смысла*.

В теме «Соответствия» (Ч. 1) было отмечено, что бинарное отношение «меньше» обладает следующими свойствами:

1) антирефлексивности – $(\forall\ a)\ \overline{a < a}$;
2) асимметричности $(\forall\ a, b)\ a < b \Rightarrow \overline{b < a}$;
3) транзитивности $(\forall\ a, b, c)\ a < b$ и $b < c \Rightarrow a < c$.

Из того, что отношение «меньше» обладает этими тремя свойствами, следует, что данное отношение является отношением строгого порядка, и оно упорядочивает множество числовых выражений так, что $\forall\ a, b$ всегда верно одно из трех утверждений: $a < b$, $a > b$ или $a = b$.

Свойства истинных числовых неравенств.

Теорема 1. Если к обеим частям истинного числового неравенства $a > b$ прибавить одно и то же числовое выражение c, имеющее смысл, то получим также истинное числовое неравенство $a + c > b + c$.

Доказательство. По условию $a > b$. По определению отношения «больше» $(\forall\ a, b)\ a > b$, если $a - b > 0$. По определению противоположного числа имеем $a - b + c - c > 0$. Сгруппируем следующим образом $(a + c) - (b+ c) > 0$. По определению отношения «больше» имеем $a + c > b + c$. Что и требовалось доказать.

Теорема 2. Если $a > b$ и $c > d$ – верные числовые неравенства, то $a + c > b + d$ тоже верное числовое неравенство. (Верные числовые неравенства одинакового смысла можно почленно складывать, от этого неравенство не нарушится).

Доказательство. По условию $a > b$. Прибавим к каждой части неравенства одно и то же числовое выражение c, имеющее смысл, по теореме 1 имеем $a + c > b + c$.

По условию $c > d$. Прибавим к каждой части неравенства одно и то же числовое выражение b, имеющее смысл, по теореме 1 имеем $b + c > b + d$.

По транзитивности отношения «больше» имеем: если $a + c > b + c$ и $b + c > b + d$, то $a + c > b + d$.

Теорема 3. Если $a > b$ и $c < d$ – верные числовые неравенства, то $a - c > b - d$ тоже верное числовое неравенство. (Верные числовые неравенства разного смысла можно почленно вычитать, оставив знак того неравенства, из которого вычитаем, от этого неравенство не нарушится).

Теорема 4. Если обе части истинного числового неравенства $a > b$ умножить на одно и го же числовое выражение c, имеющее смысл и принимающее положительное значение, то получим также истинное числовое неравенство $ac > bc$.

Теорема 5. Если обе части истинного числового неравенства $a > b$ умножить на одно и то же числовое выражение c, имеющее смысл и принимающее отрицательное значение, то, чтобы получить истинное числовое неравенство, необходимо знак неравенства поменять на противоположный, т.е. получить неравенство $ac < bc$.

Теорема 6. Если $a > b$ и $c > d$ – верные числовые неравенства и $a > 0$, $d > 0$, то $ac > bd$. (Верные числовые неравенства одинакового смысла можно почленно перемножать, от этого неравенство не нарушится, при условии, что a и d принимают положительные значения).

Т е о р е м а 7. Если $a > b$ и $c > d$ – верные числовые неравенства и $a<0$, $d<0$, то $ac < bd$. (Верные числовые неравенства одинакового смысла можно почленно перемножать, если a и d принимают отрицательные значения, то знак неравенство надо поменять на противоположный).

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Установите, какие из следующих числовых равенств и неравенств истинны:
   1) $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$;
   2) $65 < 34 + 148 : 74$;
   3) $2{,}8 \cdot 9{,}7 = 6{,}06 \cdot 4{,}08 + 1{,}6$;
   4) $34 - 5 \cdot 8 > 47 - 38 : 19$;
   5) $1{,}0905 : 0{,}025 - 6{,}84 \cdot 3{,}07 + 2{,}38 : 100 < 4{,}8 : (0{,}04 \cdot 0{,}006)$;
   6) $\left(5{,}05 : \frac{1}{40} - 2{,}8 \cdot \frac{5}{6}\right) \cdot 3 + 16 \cdot 0{,}1875 = 602$.

2. Сформулируйте условия, при которых неравенство $a \geq b$:
   1) истинно; 2) ложно.

3. Дано неравенство 5 > 3. Умножьте обе его части на 7; 0,3; 4,6; $\frac{3}{4}$. Можно ли на основании полученных результатов утверждать, что для любого положительного числа a неравенство $5a > 3a$ истинно?

4. Известно, что $a = b$ – истинное числовое равенство. При каких значениях c будут истинны следующие числовые равенства:
   1) $a + c = b + c$; 2) $ac = bc$;
   3) $a - c = b - c$; 4) $a : c = b : c$?

5. В одной корзине было 68 яблок, а в другой корзине – на 9 яблок меньше. В каждую корзину положили еще по 10 яблок. В какой корзине яблок больше и на сколько?

6. Известно, что $x > y$ – истинное неравенство. Будут ли истинными следующие неравенства:
   1) $2x > 2y$; 2) $2x - 7 < 2y - 7$;

3) $-\frac{x}{3} < -\frac{y}{3}$;

4) –2x – 7 < –2y – 7?

7. Известно, что $a < b$ – истинное неравенство. Поставьте вместо знака «*» знак «>» либо «<» так, чтобы получилось истинное неравенство:

1) $-3{,}7a * -3{,}7b$;

2) $-\frac{a}{3} * -\frac{b}{3}$;

3) $0{,}12a * 0{,}12\,b$;

4) $\frac{a}{7} * \frac{b}{7}$;

5) $-2(a + 5) * -2\,(b + 5)$;

6) $3(a - 1) * 3(b - 1)$.

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Уравнения с одной переменной. Пусть на множестве X заданы два выражения с переменной x: $f(x)$ и $g(x)$.

Определение 1. Предикат вида $f(x) = g(x)$ называют *уравнением с одной переменной*, если поставлена задача: найти все значения переменной, при подстановке которых в предикат получается истинное числовое равенство.

Определение 2. Всякое число из множества X, при подстановке которого вместо переменной x в уравнение $f(x) = g(x)$, получается истинное числовое равенство, называется *корнем* этого уравнения или, иначе, *решением уравнения.*

Определение 3. Множество всех чисел, которые являются решением уравнения, называется *множеством решений* уравнения. Решить уравнение – значит найти множество его решений.

Чтобы решить данное уравнение, его, как правило, преобразовывают, заменяя последовательно другим, более простым. Этот процесс замены продолжают до тех пор, пока не получат уравнение, решения которого можно найти известным способом. Но чтобы эти решения были решениями заданного уравнения, необходимо, чтобы в процессе преобразований получались уравнения, множества корней которых совпадают. Такие уравнения называются равносильными.

Определение 4. Два уравнения называются *равносильными*, если их множества решений совпадают.

Два уравнения порознь равносильные третьему, равносильны друг другу.

Пример 1. Уравнения $(x + 1)^2 = 9$ и $(x – 2)(x + 4) = 0$ равносильны на множестве действительных чисел, так как множество решений первого уравнения $\{–4, 2\}$и множество решений второго уравнения $\{2, –4\}$ равны.

Пример 2. Пусть уравнения $3x – 4 = 2$ и $(x – 2)(x + 3) = 0$ заданы на множестве целых чисел. Тогда множество решений первого уравнения $\{2\}$, а множество решений второго уравнения$\{2, –3\}$. Так как множества решений данных уравнений различны, то уравнения $3x - 4 = 2$ и $(x - 2)(x + 3) = 0$ не равносильны на множестве целых чисел.

Если два уравнения не имеют корней (множества их решений пусты), то их также считают равносильными: все уравнения, не имеющие решений, равносильны друг другу.

Так как уравнение есть предикат, то с каждым уравнением связаны два множества.

1.Множество X допустимых значений переменной (множество определения предиката).

2.Множество T корней уравнения (множество истинности предиката).

Множество корней уравнения является подмножеством множества допустимых значений переменной, т.е. $T \subset X$.

Выясним теперь, какие преобразования позволяют получать уравнения, равносильные исходному. Эти преобразования нашли отражение в следующих теоремах.

Теорема 1. Пусть уравнение $f(x) = g(x)$ задано на множестве X и $h(x)$ – выражение, определенное на том же множестве. Тогда уравнения $f(x) = g(x)$ (1) и $f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$ (2) равносильны на множестве X.

Эту теорему можно сформулировать иначе: если к обеим частям уравнения с областью определения X прибавить одно и тоже выражение с переменной, определенное на том же множестве X, получим новое уравнение, равносильное данному.

Прежде чем доказывать эту теорему, напомним следующее: чтобы убедиться в равенстве двух множеств, надо показать, что каждый элемент первого множества является элементом второго и, наоборот, каждый элемент второго является элементом первого. Этот факт лежит в основе доказательства теорем равносильности уравнений.

Доказательство теоремы состоит из двух частей.

1.Пусть a корень уравнений (1), тогда $f(a) = g(a)$ – истинное числовое равенство. Прибавим к обеим частям этого числового равенства число $h(a)$. Получим согласно свойству истинных числовых равенств истинное числовое равенство $f(a) + h(a) = g(a) + h(a)$, которое говорит о том, что число a является корнем уравнения (2). Итак, мы показали, что любой корень уравнения (1) является корнем уравнения (2).

2.Пусть теперь b – корень уравнения (2), тогда $f(b) + h(b) = g(b) + h(b)$ – истинное числовое равенство. Прибавив к обеим частям этого равенства число $(- h(b))$, снова получим истинное числовое равенство $f(b) = g(b)$, которое говорит о том, что число b – корень уравнения (1).

Итак, доказано, что каждый корень уравнения (2) является и корнем уравнения (1).

Мы доказали, что множества корней уравнений (1) и (2) совпадают. Следовательно, уравнения $f(x) = g(x)$ и $f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$ равносильны на множестве X.

При решении уравнений чаще используется не сама данная теорема, а следствия из нее.

Следствие 1. Если к обеим частям уравнения прибавить одно и то же число, то получим уравнение, равносильное данному.

Следствие 2. Если какое-либо слагаемое (числовое выражение или выражение с переменной) перенести из одной части уравнения в другую, поменяв знак слагаемого на противоположный, то получим уравнение, равносильное данному.

Теорема 2. Пусть уравнение $f(x) = g(x)$ задано на множестве X и $h(x)$ – выражение, определенное на том же множестве и не обращающееся в нуль ни при каких значениях x из множества X. Тогда уравнения $f(x) = g(x)$ (1) и $f(x)\cdot h(x) = g(x)\cdot h(x)$ (3) равносильны на множестве X.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

Из теоремы 2 вытекают следствия, которые часто используется при решении уравнений:

Следствие 3. Если обе части уравнения умножить (или разделить) на одно и то же число, отличное от нуля, то получим уравнение, равносильное исходному.

Следствие 4. Если изменить знаки обеих частей уравнения на противоположные, то получим уравнение равносильное данному.

Практически в процессе решения уравнений иногда приходится производить умножение или деление левой и правой частей уравнения на выражение $h(x)$, которое обращается в нуль при некоторых значениях x.

Например, решая уравнение $\frac{5x-15}{(x+2)(x-3)}=0$, мы освобождаемся от знаменателя, умножив обе части уравнения на $(x + 2)(x - 3)$, и получаем $5x - 15 = 0$, откуда $x = 3$. Но при $x = 3$ знаменатель дроби $\frac{5x-15}{(x+2)(x-3)}$ обращается в нуль, и поэтому $x = 3$ не может быть корнем исходного уравнения, т. е. $x = 3$ оказывается для него посторонним корнем.

Какие корни считают посторонними?

Замечание. Пусть даны два уравнения $f_1(x) = g_1(x)$ (1) и $f_2(x) = g_2(x)$ (2). Если известно, что все корни уравнения (1) являются корнями уравнения (2), то про уравнение (2) можно сказать, что оно следует из уравнения (1) или что уравнение (2) есть следствие уравнения (1). Если же уравнение (2) имеет корни, не удовлетворяющие уравнению (1), то они и будут посторонними для уравнения (1). Корни уравнения (2), не являющиеся корнями уравнения (1) называются посторонними корнями, и при записи ответа они должны быть отброшены.

Вообще, если в процессе решения уравнения его заменяют следствием (а не равносильным уравнением), то надо найти все корни уравнения-следствия, а затем их проверить, подставив в исходное уравнение. Посторонние корни отбрасывают.

Возьмем теперь уравнение $x(x - 5) = 2x$, $x \in R$. Иногда учащиеся решают его так: делят обе части на x, получают уравнение $x - 5 = 2$, откуда, находят, что $x = 7$, и заключают: $\{7\}$ – множество решений данного уравнения.

Нетрудно видеть, что при $x = 0$ данное уравнение обращается в истинное числовое равенство $0 \cdot (0-5) = 2 \cdot 0$. Значит, 0 – корень данного уравнения. Произошла потеря этого корня.

Уравнение $x - 5 = 2$ не равносильно уравнению $x(x - 5) = 2x$ на множестве действительных чисел, так как получено из последнего умножением на выражение $\frac{1}{x}$, которое определено не для всех действительных чисел (в частности, при $x = 0$ оно не имеет смысла), т.е. нами не выполнено условие теоремы 2, что и привело к потере корня.

Следует заметить, что приобретение посторонних корней менее «опасное» явление, чем их потеря. Поэтому при решении уравнений необходимо в первую очередь строго следить за правильным применением теорем о равносильности.

Пример 3. Решить уравнение $\frac{6}{x+2} + \frac{x+2}{2-x} - \frac{x^2}{4-x^2} = 0$.

Решение. Определим множество допустимых значений переменной x.

Множество допустимых значений переменной x в этом уравнении является множество всех действительных чисел, кроме чисел 2 и –2. При $x = -2$ и $x = 2$ выражение, стоящее в левой части уравнения не имеет смысла.

Освободимся от знаменателей. Это возможно на основании теоремы 2: умножим обе части уравнения на выражение $4 - x^2$, так как это выражение имеет смысл и нигде не обращается в нуль при всех x из множества X допустимых значений переменной, то уравнение $12 - 6x + x^2 + 4x + 4 - x^2 = 0$ равносильно данному на множестве X.

Приводим подобные члены, что возможно на основании теоремы 1, получаем уравнение $16 - 2x = 0$, которое равносильно предыдущему уравнению, а значит и данному уравнению. Далее, переносим число 16 в правую часть, что также возможно на основании следствия 2 теоремы 1: $-2x = -16$. Полученное уравнение равносильно предыдущему уравнению, а следовательно, и данному уравнению. Умножив обе части последнего уравнения на $\left(-\frac{1}{2}\right)$ (на основании теоремы 2, приходим к уравнению $x = 8$. Ясно, что уравнение x = 8 равносильно данному уравнению. Поэтому говорим, что решением данного уравнения является число 8.

В начальной школе уравнения решают не путем перехода к равносильным уравнениям, а на основе знания связи между результатом и компонентами арифметических действий, причем определяют уравнение как истинное равенство, в которое входит неизвестное число.

Пример 4. Решить уравнение $4\left(\frac{2x+3}{5}+1\right)$ = 16, используя зависимость между компонентами и результатами действий.

Решение. Поскольку неизвестное x содержится в одном из множителей, то этот множитель находим, разделив значение произведения на другой множитель:

$$\frac{2x+3}{5}+1=16:4 \Rightarrow \frac{2x+3}{5}+1=4.$$

Теперь неизвестное число содержится в первом слагаемом, и чтобы его найти, надо из значения суммы вычесть второе слагаемое: $\frac{2x+3}{5}=4-1 \Rightarrow \frac{2x+3}{5}=3$.

Неизвестное теперь содержится в делимом и равно: $2x+3=5\cdot 3 \Rightarrow 2x + 3 = 15$.

Далее находим слагаемое $2x$: $2x = 15 – 3$. Откуда $x = 12 : 2$, $x = 6$.

Можно решить уравнение, используя теорию предикатов.

Пример 5. Найти множество истинности предиката:

$$(x + 3)(x – 2) = 0.$$

Выделим в данном предикате более простые предикаты.

A(x): $x + 3 = 0$,

B(x): $x – 2 = 0$.

Тогда уравнение можно записать в виде логической операции над предикатами. Значение произведения нескольких множителей может быть равно нулю, если значение хотя бы одного их них равно 0. Следовательно, предикаты A(x) и B(x) связаны между собой дизъюнкцией $A(x) \vee B(x)$.

Чтобы найти множество истинности дизъюнкции предикатов, надо найти объединение множеств истинности исходных предикатов: $M_{A(x)\vee B(x)} = M_{ИA(x)} \cup M_{ИB(x)}$.

Найдем множество истинности предикатов A(x) и B(x).

$M_{ИA(x)} = \{ –3\}$, $M_{ИB(x)} = \{2\}$.

Отсюда $M_{ИA(x)\vee B(x)} = \{-3\} \cup \{2\} = \{-3;2\}$.

Множеством истинности предиката $(x + 3)(x – 2) = 0$ является множество $\{–3; 2\}$.

Неравенства с одной переменной.

Определение 1. *Неравенством с одной переменной* называется предикат вида $f(x) > g(x)$ или $f(x) < g(x)$, где выражения $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве X.

Определение 2. Значение переменной x из множества X, при котором неравенство обращается в истинное числовое неравенство, называется его *решением*. Найти множество решений данного неравенства – значит решить это неравенство.

Определение 3. Множество значений переменной, при которых выражения $f(x)$ и $g(x)$ имеют смысл, называется *областью определения неравенства*. Множество решений неравенства является подмножеством области определения неравенства.

В школьном курсе математики рассматриваются различные неравенства с одной переменной. Мы будем рассматривать только неравенства первой степени. В основе решения таких неравенств, так же как и решения уравнений, лежит понятие равносильности и теоремы о равносильности неравенств.

Определение 4. Два неравенства называются *равносильными*, если их множества решений равны.

Пример 1. Неравенства $5x – 8 > 12$ и $5x > 20$ равносильны, так как их множества решений равны и представляют собой промежуток $(4, \infty)$.

Теоремы о равносильности неравенств и следствия из них по своей сути похожи на соответствующие теоремы о равносильности уравнений, а доказательство их проводится аналогично доказательству теоремы 1 о равносильности уравнений.

Пусть имеется неравенство $f(x) > g(x)$, причем $x \in X$, где X – множество допустимых значений переменной.

Теорема 1. Если к обеим частям неравенства $f(x) > g(x)$ (1) прибавить выражение $h(x)$, не теряющее смысла при всех допустимых значениях $x \in X$, то получим новое неравенство $f(x) + h(x) > g(x) + h(x)$ (2) равносильное данному на множестве X.

Доказательство теоремы состоит из двух частей.

1.Пусть – a решение неравенства (1), тогда f (a) > g(a) – истинное числовое неравенство. Прибавим к обеим частям этого числового неравенства число h(a). Получим согласно свойства истинных числовых неравенств истинное числовое неравенство f(a) + h(a) > g(a) + h(a), которое говорит о том, что число a является решением неравенства (2). Итак, мы показали, что любое решение неравенства (1) является решением неравенства (2).

2.Пусть теперь b – решение неравенства (2), тогда f(b) + h(b) > g(b) + h(b) – истинное числовое неравенство. Прибавив к обеим частям этого неравенства число (– h(b)), снова получим истинное числовое неравенство f(b) > g(b), которое говорит о том, что число b – решение неравенства (1).

Итак, доказано, что решение неравенства (2) является и решением неравенства (1).

Мы доказали, что множества корней уравнений (1) и (2) совпадают. Следовательно, уравнения f(x) > g(x) и f(x) + h(x) > g(x) + h(x) равносильны на множестве X.

При решении неравенств чаще используется не сама данная теорема, а следствия из нее:

Следствие 1. Если к обеим частям неравенства прибавить одно и то же число, то получим неравенство, равносильное данному.

Следствие 2. Если какое-либо слагаемое (числовое выражение или выражение с переменной) перенести из одной части неравенства в другую, поменяв знак слагаемого на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному.

Теорема 2. Если обе части неравенства f(x) > g(x) умножить на одно и то же выражение h(x) > 0, для всех $x \in$ X, то получим новое неравенство f(x)·h(x) > g(x)·h(x) равносильное данному на множестве X.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

Из теоремы 2 вытекают следующее следствие.

Следствие 3. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, оставив знак неравенства без изменения, то получим неравенство, равносильное данному.

Теорема 3. Если при всех x из множества X выражение $h(x) < 0$, то неравенства $f(x) > g(x)$ и $f(x)\cdot h(x) < g(x)\cdot h(x)$ равносильны на множестве X.

Из теоремы 3 вытекают следующие свойства.

Следствие 4. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число и при этом изменить знак неравенства на противоположный, то получим неравенство равносильное данному.

Следствие 5. Если изменить знаки обеих частей неравенства и сам знак неравенства на противоположный, то получим неравенство равносильное данному.

Пример 2. Решить неравенство $2(x-3)+5(1-x) \geq 3(2x-5)$.

Решение. Раскрыв скобки, получим:

$2x - 6 + 5 - 5x \geq 6x - 15 \Rightarrow -3x - 1 \geq 6x - 15$ (1)

Далее, имеем: $-3x - 6x \geq -15 + 1 \Rightarrow -9x \geq -14$. (2)

Неравенство (2) равносильно неравенству (1), а значит и заданному неравенству согласно следствию 2.

Разделим теперь обе части неравенства (2) на отрицательное число (–9) и изменим знак неравенства. Согласно следствию 4 получим неравенство, равносильное неравенству (2): $x \leq \frac{14}{9}$.

Множество решений последнего неравенства, а вместе с тем и исходного неравенства есть числовой промежуток $\left(-\infty; \frac{14}{9}\right]$.

Пример 3. Решить неравенство

$$\frac{(3x-5)(2+x)+5-8x}{3} < \frac{2x^2-5x+3}{2}.$$

Решение. Освободимся от знаменателя, для чего умножим обе части неравенства на положительное число 6:

$$2((3x-5)(2+x)+5-8x) < 3(2x^2-5x+3).$$

Далее имеем: $2\cdot(6x - 10 + 3x^2 - 5x + 5 - 8x) < 6x^2 - 15x + 9$,

$$2\cdot(3x^2 - 7x - 5) < 6x^2 - 15x + 9,$$

$$6x^2 - 14x - 10 < 6x^2 - 15x + 9,$$

$$6x^2 - 14x - 6x^2 + 15x < 9 + 10.$$

$$x < 19.$$

Множество решений последнего неравенства, а значит, и равносильного ему заданного неравенства есть промежуток $(-\infty\,; 19)$.

Пример 4. Решить неравенство

$$12x - \frac{x-2}{3} + 2(x+1) > 5(3x-1) - \frac{2x+3}{2} - \frac{x}{3}.$$

Решение. Имеем последовательно:

$$72x - 2(x-2) + 12(x+1) > 30(3x-1) - 3(2x+3) - 2x,$$

$$72x - 2x + 4 + 12x + 12 > 90x - 30 - 6x - 9 - 2x,$$

$$82x + 16 > 82x - 39,$$

$$0 \cdot x > -55.$$

Последнее неравенство верно при любом значении x, так как при любом значении x получается истинное высказывание $0 > -55$. Поэтому множеством его решений (а значит, и множеством решений заданного неравенства) будет вся числовая прямая, т.е. промежуток $(-\infty;+\infty)$.

Пример 5. Решить неравенство

$$7\left(x + \frac{1}{7}\right) - \frac{2x-3}{5} > 3\left(x - \frac{x-2}{3}\right) + \frac{23x}{5}.$$

Решение. Имеем:

$$7x + 1 - \frac{2x-3}{5} > 3x - x + 2 + \frac{23x}{5},$$

$$35x + 5 - 2x + 3 > 15x - 5x + 10 + 23x,$$

$$33x + 8 > 33x + 10,$$

$$33x - 33x > 10 - 8,$$

$$0 \cdot x > 2.$$

Последнее неравенство не имеет решений, так как при любом значении переменной x получается ложное высказывание $0 > 2$, значит, и заданное неравенство не имеет решений, т.е. множество решений пусто: $\varnothing$.

Можно решить неравенство, используя теорию предикатов.

Пример 5. Найти множество истинности предиката:

$$(x+2)(x-2) > 0.$$

Решение. Представим данный предикат в виде простых предикатов.

A(x): $x + 3 > 0$;

B(x): $x + 3 < 0$;

C(x): $x - 2 > 0$;

D(x): $x - 2 < 0$.

Тогда неравенство можно записать в виде логической операции над предикатами.

Значение произведения нескольких множителей положительно, если множители имеют одинаковые знаки, следовательно, данные предикаты связаны между собой следующим образом $A(x) \wedge C(x) \vee B(x) \wedge D(x)$.

По определению операций дизъюнкции и конъюнкции предикатов множества истинности входящих в сложный предикат предложений связаны равенством:

$$M_{И(A(x) \wedge C(x) \vee B(x) \wedge D(x))} = M_{ИA(x)} \cap M_{ИC(x)} \cup M_{ИB(x)} \cap M_{ИD(x)}.$$

Найдем множества истинности предикатов A(x), B(x), C(x), D(x):

$M_{ИA(x)} = \{x > -3\}$,

$M_{ИB(x)} = \{x < -3\}$,

$M_{ИC(x)} = \{x > 2\}$,

$M_{ИD(x)} = \{x < 2\}$.

Отсюда

$$\begin{gathered} M_{ИA(x) \wedge C(x) \vee B(x) \wedge D(x)} = \{x > -3\} \cap \{x > 2\} \cup \\ \cup \{x < -3\} \cap \{x < 2\} = \{x > 2\} \cup \{x < -3\} \end{gathered}.$$

Множеством истинности предиката $(x + 2)(x - 2) > 0$ является множество $\{x > 2\} \cup \{x < -3\}$.

Кроме неравенства вида f(x) > g(x), в математике рассматривают неравенства вида f(x) $\geq$ g(x). Оно представляет собой дизъюнкцию неравенства f(x) > g(x) и уравнения f(x) = g(x). Например, неравенство $x + 2 \geq 5$ есть дизъюнкция неравенства $x + 2 > 5$ и уравнения $x + 2 = 5$. Решением неравенства $x + 2 \geq 5$ будет объединение множества решений неравенства $x + 2 > 5$ с множеством решений уравнения $x + 2 = 5$, т. е. множество чисел $x \geq 3$.

Все неравенства младшие школьники решают методом подбора или сведения неравенства к равенству.

Например, в начальных классах рассматриваются такие задачи:

а) подбери числа так, чтобы записи были верными $48 : b < 24$, $58 + a < 65$;

б) из ряда чисел 14, 15, 16, 17, 18, 19 выпишите те значения слагаемого c, при которых $c + 24 > 40$;

в) решите неравенства, используя решения соответствующих уравнений $k - 37 < 29$, $75 - c > 48$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Равносильны ли следующие пары уравнений?

а) $(2x - 1)(x^2+9) = (3x - 6)(x^2 + 9)$ и $2x - 1 = 3x - 6$;

б) $x^2 + 2x + 1 = 0$ и $x + 1 = 0$;

в) $\sqrt{x^2 + 2x + 1} = -(x+1)$ и $1 + x = 0$;

г) $\dfrac{x^2}{x-1} = 2$ и $\dfrac{x}{x-1} = 2$.

2. Даны уравнения:

а) $x^2 = a^2x$; б) $ax^2 - 4 = 0$;

в) $ax - a^2 = 4 - 2x$; г) $a + x = a^2x - 1$.

При каких значениях параметра а эти уравнения имеют: 1) единственное решение; 2) бесконечное множество решений; 3) не имеют решение?

3. При каких значениях параметра a уравнение не имеет решений?

а) $\dfrac{x-5}{x+7} = \dfrac{a-x}{x-7}$; б) $2(a - 2x) = ax + 3$;

в) $a^2x = a(x+2) - 2$; г) $\dfrac{8+5x}{2-x} = 2a$.

4. При каких значениях параметра a уравнение имеет единственное решение?

а) $ax^2 - 6x + 9 = 0$; б) $x^2 + ax + \dfrac{1}{4} = 0$;

в) $4x^2 - ax + a - 3 = 0$; г) $x^2 + 4x + a = 0$.

5. Решить уравнения:

а) $\dfrac{24}{x^2+2x-8} - \dfrac{15}{x^2+2x-3} = 2$;

б) $\dfrac{x^2-|x|-12}{x-3}=2x$;

в) $\dfrac{3}{x+2}-\dfrac{3(2-5x)}{x^3+8}=\dfrac{4}{x^2-2x+4}$;

г) $\dfrac{8+x^2}{8-x^3}-\dfrac{2x}{2x+4+x^2}=\dfrac{1}{2-x}$;

д) $\dfrac{x^2+3x+9}{x^3+27}-\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{2}{x^2-3x+9}$.

6. Решите текстовые задачи с помощью составления уравнения.

а) Турист прошел 3 км по шоссе и 6 км – по проселочной дороге, затратив на весь путь 2 ч. По шоссе он шел со скоростью на 2 км/час большей, чем по проселку. С какой скоростью шел турист по проселочной дороге?

б) Бригада должна была выполнить заказ за 12 дней. Ежедневно перевыполняя норму на 25%, бригада за 10 дней работы не только выполнила заказ, но и еще изготовила сверх нормы 42 детали. Сколько деталей в день изготовляла бригада?

в) Две бригады, работая совместно, могут построить склад за 4 дня. Первая бригада, работая одна, могла бы построить его на 6 дней быстрее второй. За сколько дней могла бы построить склад первая бригада, работая одна?

г) Для перевозки 180 туристов было заказано несколько автобусов. Но так как к назначенном сроку не прибыли 2 автобуса, а туристов приехало на 8 человек больше, чем ожидалось, то в каждый автобус разместилось на 17 человек больше, чем предполагалось. Сколько туристов ехало на автобусе?

7. Равносильны ли на множестве действительных чисел следующие пары неравенств:

а) $2x + 5 + x^2 > 3 + x^2$ и $2x + 5 > 3$;

б) $\dfrac{3x-1}{4+x^2}>0$ и $3x - 1 > 0$;

в) $6 - 5x > -4$ и $x < 2$;

г) $(x - 2)(2x + 7) < 5(x - 2)$ и $2x + 7 < 5$?

8. Укажите множество, на котором равносильны следующие неравенства:

а) $\dfrac{x^2-1}{x^2+2}>2$ и x^2-1;

б) $\dfrac{x-1}{x+2}<3$ и $(x-1)<3(x+2)$.

9. Решите неравенство $3(x-2)-4(x+1)<2(x-3)-2$ и обоснуйте все преобразования, которые будете при этом выполнять.

10. Докажите, что решением неравенства $2(x+1)+5>3-(1-2x)$ является любое действительное число.

11. Решите, составляя неравенство, следующие задачи.

а) Длина стороны прямоугольника 6 см. Какой должна быть длина другой стороны, чтобы периметр прямоугольника был меньше периметра квадрата со стороной 4 см? Укажите одно из таких значений.

б) Длина основания прямоугольного параллелепипеда 12 дм, ширина 5 дм. Какой должна быть высота параллелепипеда, чтобы его объем был меньше объема куба с ребром 9 дм? Укажите одно из значений высоты параллелепипеда. Может ли высота равняться 1 м; 120 см?

12. Определите множество истинности следующих предикатов:

а) $(x-2>2x-3)\vee(4x+5>x+17)$;

б) $(5x-2\le 2x+1)\wedge(2x+3<18x-3)$.

13. Определите множество истинности дизъюнкции высказывательных форм $3x+7<22$, $17-2x>1$, если они заданы на множестве: а) $\{-5, -4, -3, \dots, 4, 5\}$; б) натуральных чисел; в) действительных чисел.

14. Найдите множество решений неравенства:

а) $|5-2x|>9$; б) $|6-3x\le 7|$.

СИСТЕМЫ И СОВОКУПНОСТИ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Системы уравнений с одной переменной. Пусть даны два уравнения: $f_1(x) = f_2(x)$ (1) и $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ (2). Необходимо найти такие значения переменной x, при которых оба уравнения одновременно обращаются в верные числовые равенства. Тогда говорят о системе уравнений (1) и (2).

Определение 1. *Уравнения* (1) и (2) образуют *систему*, если требуется отыскать такие значения переменной x, которые обращают *каждое* из уравнений в верное числовое равенство.

Обозначают систему уравнений таким образом:

$$\begin{cases} f_1(x) = f_2(x) \\ \varphi_1(x) = \varphi_2(x) \end{cases}$$

С логической точки зрения система уравнений является конъюнкцией этих уравнений. Поэтому определение системы уравнений можно сформулировать и на языке математической логики.

Определение 2. *Системой уравнений* (1) и (2) называется конъюнкция предикатов $f_1(x) = f_2(x) \wedge \varphi_1(x) = \varphi_2(x)$.

Определение 3. Значение переменной x, которое обращает *каждое* из уравнений (1) и (2) в верные числовые равенства, называется *решением системы уравнений*.

Известно, что множество истинности конъюнкции предикатов является пересечением множеств истинности самих предикатов. Следовательно, чтобы найти решение системы, нужно найти множества решений уравнений (1) и (2), пересечение этих множеств и будет решением системы уравнений.

Пример 1. Необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - 5 = -2x \\ x^2 + 4x - 5 = 0 \end{cases}.$$

Решение. Решим каждое из уравнений отдельно.

Первое уравнение системы: $3x - 5 = -2x$,

$$5x = 5,$$

$$x = 1.$$

Второе уравнение системы $x^2+4x-5=0$ является квадратным. Найдем дискриминант $D=16+4\cdot 5=36$. Находим корни: $x_1=\frac{-4-6}{2}=-5$, $x_2=\frac{-4+6}{2}=1$.

Следовательно, решением системы уравнений будет общий корень $x = 1$.

Ответ: 1.

Уравнение вида $\frac{f_1(x)}{g(x)}=\frac{f_2(x)}{g(x)}$ равносильно системе

$$\begin{cases} f_1(x)=f_2(x) \\ g(x)\neq 0 \end{cases}.$$

Пример 2. Необходимо решить уравнение

$$\frac{40}{x^2-15x+50}+\frac{8}{x-5}=\frac{x}{x-10}.$$

Решение. Приведем выражения, стоящие в левой и правой частях уравнения к общему знаменателю. Заметим, что квадратный трехчлен, стоящий в знаменателе первой дроби раскладывается на множители $x^2-15x+50=(x-5)(x-10)$. Получим следующее уравнение: $\frac{40+8x-80}{(x-5)(x-10)}=\frac{x^2-5x}{(x-5)(x-10)}$, которое равносильно системе: $\begin{cases} 8x-40=x^2-5x \\ (x-5)(x-10)\neq 0 \end{cases}$.

Из квадратного уравнения $8x-40=x^2-5x$, после приведения его к стандартному виду, находим корни: $x_1=5$ и $x_2=8$. Далее проверим, не обращают ли знаменатель в нуль найденные значения переменной x. Для этого подставляем их последовательно вместо x в выражение $(x-5)(x-10)$. Получим: $(5-5)(5-10)=0$, а $(8-5)(8-10)=-6\neq 0$, следовательно, решением системы является $x_2=8$, а значит и решением исходного уравнения будет $x = 8$.

Ответ: 8.

Система уравнений с двумя переменными. Понятие системы уравнений с двумя переменными является обобщением понятия системы уравнений с переменными.

Пусть даны два уравнения: $f_1(x,y) = f_2(x,y)$ (1) и

$\varphi_1(x,y) = \varphi_2(x,y)$ (2).

Необходимо найти такие значения переменных x и y, при которых оба уравнения одновременно обращаются в верные числовые равенства.

Определение 1. *Уравнения* (1) и (2) *образуют систему*, если требуется отыскать такие значения переменных x и y, которые обращают *каждое* из уравнений в верное числовое равенство.

Обозначают систему уравнений с двумя переменными:

$$\begin{cases} f_1(x,y) = f_2(x,y) \\ \varphi_1(x,y) = \varphi_2(x,y) \end{cases}.$$

С логической точки зрения система уравнений является конъюнкцией двуместных предикатов.

$$f_1(x,y) = f_2(x,y) \wedge \varphi_1(x,y) = \varphi_2(x,y).$$

Определение 2. Пересечение областей определения уравнений (1) и (2) называется *областью определения системы* уравнений с двумя переменными.

Определение 3. Любая пара чисел (a,b), которая обращает *каждое* из уравнений (1) и (2) в верное числовое равенство, называется *решением системы уравнений с двумя переменными*.

Определение 4. Система уравнений с двумя переменными называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение. В противном случае система уравнений с двумя переменными называется *несовместной* или *противоречивой*.

Определение 5. Совместная система уравнений называется *определенной*, если она имеет конечное число решений. Если же множество ее решений бесконечно, то *неопределенной*.

Чтобы *решить систему уравнений с двумя переменными*, нужно найти все ее решения или показать, что система несовместна.

Равносильность систем уравнений.

Определение 1. Две системы уравнений, рассматриваемые на одном и том же множестве, называются *равносильными*, если множества их решений равны.

Как следует из определения, любые две несовместные системы уравнений считаются равносильными.

Определение 2. Если две системы уравнений равносильны одной и той же третьей системе, то они равносильны между собой.

При решении систем уравнений очень часто заменяют данную систему уравнений другой, которая равносильна данной, но является более простой.

Рассмотрим некоторые преобразования, в результате которых получаются новые системы уравнений, равносильные данной.

Теорема 1. Если в системе уравнений заменить любое уравнение ему равносильным, то получим новую систему уравнений, равносильную данной.

Доказательство. Предположим, что в системе $\begin{cases} f_1(x,y)=f_2(x,y) \\ \varphi_1(x,y)=\varphi_2(x,y) \end{cases}$ (3) уравнение $f_1(x,y)=f_2(x,y)$ заменено равносильным ему уравнением $\psi_1(x,y)=\psi_2(x,y)$. В результате получим систему уравнений: $\begin{cases} \psi_1(x,y)=\psi_2(x,y) \\ \varphi_1(x,y)=\varphi_2(x,y) \end{cases}$ (4).

Покажем, что системы уравнений (3) и (4) равносильны. Пусть T_3 и T_4 – множества решений систем (3) и (4) соответственно, и (a, b) – произвольное решение системы (3), то есть $(a,b)\in T_3$. Тогда (a, b) – решение каждого из уравнений этой системы, следовательно, $f_1(a,b)=f_2(a,b)$ и $\varphi_1(a,b)=\varphi_2(a,b)$ – верные числовые равенства. Из равносильности уравнений $f_1(x,y)=f_2(x,y)$ и $\psi_1(x,y)=\psi_2(x,y)$ следует, что $\psi_1(a,b)=\psi_2(a,b)$ – верное числовое равенство. Следовательно, пара (a, b) является решением системы (4). Так как пара (a, b) – произвольное решение системы (3), то $T_3 \subset T_4$.

Обратно. Пусть пара $(c,d)\in T_4$ – произвольное решение системы (4). Аналогично предыдущему, получим, что $T_4 \subset T_3$. Таким образом, $T_5 = T_6$, и равносильность систем уравнений (3) и (4) доказана.

Если к обеим частям уравнения $f_1(x,y)= f_2(x,y)$ прибавить выражение $-f_2(x,y)$, то получим равносильное данному уравнение $f_1(x, y) - f_2(x, y) = 0$, то есть уравнение $f_1(x, y) = f_2(x, y)$ равносильно уравнению вида $F_1(x, y) = 0$. Аналогично рассуждая, уравнение $\varphi_1(x,y)=\varphi_2(x,y)$ будет равносильно уравнению вида $F_2(x, y) = 0$. Тогда, согласно теореме 1 систему уравнений (3) всегда можно заменить равносильной ей системой уравнений вида $\begin{cases} F_1(x,y)=0 \\ F_2(x,y)=0 \end{cases}$.

Далее мы будем рассматривать системы уравнений именно такого вида.

Теорема 2. Пусть $g_1(x,y)$ и $g_2(x,y)$ – выражения, имеющие смысл и отличные от нуля при всех допустимых значениях переменных, тогда равносильны следующие системы уравнений

$$\begin{cases} F_1(x,y)=0 \\ F_2(x,y)=0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} F_1(x,y)\cdot g_1(x,y)+F_2(x,y)\cdot g_2(x,y)=0 \\ F_2(x,y)=0 \end{cases}$$

Справедливость данной теоремы вытекает из определения равносильных систем и теорем о равносильности данного уравнения и уравнений, которые получаются из данного путем прибавления к обеим частям выражения, имеющего смысл при всех допустимых значениях переменных; или путем умножения обеих частей уравнения на выражение, имеющее смысл и отличное от нуля при всех допустимых значениях переменных.

Следствие из теоремы 2. Если к одному из уравнений системы, умноженному на число, отличное от нуля, прибавить другое уравнение этой системы, также умноженное на число, отличное от нуля, а второе уравнение системы оставить без изменения, то получим систему уравнений, равносильную данной.

Т е о р е м а 3. Если уравнение $y = f(x)$ равносильно уравнению $F_1(x, y) = 0$, то система $\begin{cases} F_1(x, y) = 0 \\ F_2(x, y) = 0 \end{cases}$ (5) равносильна системе $\begin{cases} y = f(x) \\ F_2(x, f(x)) = 0 \end{cases}$ (6).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через T_5 и T_6 – множества решений систем (5) и (6) соответственно. Докажем, что $T_5 \subset T_6$ и $T_6 \subset T_5$, то есть $T_5 = T_6$.

1.Пусть пара (a, b) – произвольное решение системы (5), следовательно, $(a, b) \in T_5$. Тогда $F_1(a, b) = 0$ и $F_2(a, b) = 0$ – верные числовые равенства. В силу равносильности уравнений $y = f(x)$ и $F_1(x, y) = 0$, следует, что $b = f(a)$ – верное числовое равенство. Но тогда и $F_2(a, f(a)) = 0$ – верное числовое равенство, и пара (a, b) – решение системы (6). Таким образом, в силу произвольности выбора пары (a, b), всякое решение системы (5) является решением системы (6), то есть $T_5 \subset T_6$.

2.Пусть пара (c, d) – произвольное решение системы (6), то есть $(c, d) \in T_6$. Тогда $d = f(c)$ и $F_2(c, f(c)) = 0$ – верные числовые равенства.

Равенство $F_2(c, f(c)) = 0$ можно записать в виде $F_2(c, d) = 0$. Так как уравнения $y = f(x)$ и $F_1(x, y) = 0$ равносильны, то $F_1(c, d) = 0$. Таким образом, $F_1(c, d) = 0$ и $F_2(c, d) = 0$ – верные числовые равенства. Следовательно, пара (c, d) является решением системы (5) и $T_5 \subset T_6$, то есть $T_5 = T_6$. Равносильность систем (5) и (6) доказана.

Система уравнений $\begin{cases} \Phi_1(x, y) = 0 \\ \Phi_2(x, y) = 0 \end{cases}$ называется следствием системы уравнений $\begin{cases} F_1(x, y) = 0 \\ F_2(x, y) = 0 \end{cases}$, если всякое решение системы $\begin{cases} F_1(x, y) = 0 \\ F_2(x, y) = 0 \end{cases}$ является решением системы $\begin{cases} \Phi_1(x, y) = 0 \\ \Phi_2(x, y) = 0 \end{cases}$.

Система уравнений $\begin{cases}\Phi_1(x,y)=0\\ \Phi_2(x,y)=0\end{cases}$ может иметь решения, не удовлетворяющие системе уравнений $\begin{cases}F_1(x,y)=0\\ F_2(x,y)=0\end{cases}$. Эти решения называются *посторонними* для системы $\begin{cases}F_1(x,y)=0\\ F_2(x,y)=0\end{cases}$.

Эти системы уравнений будут равносильными в том и только в том случае, когда каждая из них будет следствием другой.

Основные элементарные методы решения систем уравнений. Задача решения систем уравнений является довольно трудной и не всегда поддается элементарным приемам. При решении системы уравнений чаще всего применяют замену данной системы на равносильную, но более простую. Процесс замены осуществляется до тех пор, пока не удастся получить такую систему, которую можно решить известным способом (методом). Рассмотрим некоторые элементарные методы решения систем уравнений.

Метод алгебраического сложения. При решении системы уравнений методом алгебраического сложения применяют следующий *алгоритм*:

1) одно из уравнений системы умножают на отличный от нуля и определенный при всех допустимых значениях переменных множитель, который специально подбирают (чаще всего множитель подбирают так, чтобы в результате выполнения третьего пункта алгоритма в новом уравнении осталось одно неизвестное);

2) если есть необходимость, то второе уравнение системы также умножают на отличный от нуля и определенный при всех допустимых значениях переменных множитель, который специально подбирают;

3) полученные уравнения системы складывают (если множители, на которые умножались исходные уравнения системы, были подобраны правильно, то в новом уравнений должно остаться одно неизвестное);

4) производят замену данной системы уравнений на равносильную (в которой первое уравнений – это уравнение, полученное в пункте 3, а второе – любое из уравнений системы) и решают ее.

В результате выполнения алгоритма согласно теореме 2 получается система уравнений равносильная данной, поэтому все корни полученной системы уравнений являются и корнями данной.

Пример. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2+4y=8 \\ x+y=2 \end{cases}$.

Решение. Произведем решение системы уравнений по описанному выше алгоритму.

1. Умножим второе уравнение системы на –4, в результате чего оно примет вид: $-4x-4y=-8$.

2. Умножать первое уравнение системы в данном случае нет необходимости.

3. $\dfrac{\begin{cases} \;\;\; x^2+4y=8 \\ -4x-4y=-8 \end{cases}}{x^2-4x \;\;=0}$.

4. Следовательно, данная система уравнений равносильна системе $\begin{cases} x^2-4x=0 \\ x \;+y \;=2 \end{cases}$.

Из первого уравнения этой системы находим $x_1=0$, $x_2=4$. Из второго уравнения системы находим соответствующие значения y: $y_1=2$, $y_2=-2$.

Ответ: $\begin{cases} x_1=0 \\ y_1=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x_2=4 \\ y_2=-2 \end{cases}$ или (0; 2); (4; –2).

Метод подстановки. При решении системы уравнений методом подстановки применяют следующий *алгоритм*:

1) решают одно из уравнений системы, выражая одно неизвестное через другое;

2) подставляют выражение для неизвестного, найденное в пункте один, в другое уравнение системы (в результате этого в системе получается уравнение, содержащее только одно неизвестное);

3) производят замену данной системы уравнений на равносильную (в которой первое уравнение – это выражение для неизвестного, найденное в пункте 1, а второе – уравнение с одним неизвестным, полученное в пункте 2) и решают ее.

В результате выполнения алгоритма согласно теореме 3 получается система уравнений равносильная данной, поэтому все корни полученной системы уравнений являются и корнями данной.

Пример. Решить систему уравнений $\begin{cases} x+2y=7 \\ 2y^2+xy=14 \end{cases}$.

Решение. Произведем решение системы уравнений по описанному выше алгоритму.

1. Из первого уравнение системы выразим x через y, в результате чего получим выражение: $x = 7 - 2y$.

2. Подставим найденное выражение во второе уравнение системы, таким образом, второе уравнение системы примет вид: $2y^2+(7-2y)y=14$.

3. Следовательно, данная система уравнений равносильна системе $\begin{cases} x=7-2y \\ 2y^2+(7-2y)y=14 \end{cases}$.

Из второго уравнения этой системы находим $y = 2$. Тогда $x = 3$.

Ответ: $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$ или $(3;2)$.

Введение новых переменных. Часто этот метод называют методом замены переменных. В его основе при решении системы уравнений лежит выбор новых (вспомогательных) переменных, в результате чего данная система уравнений приводится к системе уравнений относительно новых переменных, которую можно решить либо методом подстановки, либо алгебраическим сложением. В каждом конкретном случае решают, как лучше выбрать вспомогательные переменные. Такому выбору часто помогают следующие формулы:

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy, \text{ или } x^2+y^2=(x-y)^2+2xy,$$

$$\text{или } x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y).$$

С помощью этих формул системы уравнений вида:

$$\begin{cases} x^2+y^2=k_1 \\ x\cdot y=k_2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x^2+y^2=k_3 \\ x+y=k_4 \end{cases}, \text{ где } k_1,k_2,k_3,k_4\in R,$$

приводятся в результате введения новых переменных к системам уравнений относительно xy; $x+y$ или $x-y$.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2+y^2)\cdot(x-y)=40 \\ xy\cdot(x-y)=16 \end{cases}.$$

Решение. Заметим, что в первом и во втором уравнении системы есть множитель $x-y$, а согласно формулам, приведенным выше $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$. Поэтому в данном случае целесообразно сделать следующую замену переменных:

$$\begin{cases} x\cdot y=a \\ x-y=b \end{cases}.$$

Таким образом, исходная система примет вид:

$$\begin{cases} (b^2+2a)\cdot b=40 \\ a\cdot b=16 \end{cases}.$$

Решим эту систему: $\begin{cases} b^3+2ab=40 \\ a\cdot b=16 \end{cases}$. Применим метод алгебраического сложения (умножим второе уравнение системы на (–2) и произведем сложение), в результате получим:

$$\begin{cases} b^3=8 \\ a\cdot b=16 \end{cases}. \text{ Откуда } \begin{cases} b=2 \\ a=8 \end{cases}.$$

Итак, данная система уравнений равносильна системе $\begin{cases} x \cdot y = 8 \\ x - y = 2 \end{cases}$. Для ее решения применим метод подстановки: $\begin{cases} x = 2 + y \\ (2 + y) \cdot y = 8 \end{cases}$. Откуда $x_1 = 4$, $y_1 = 2$ или $x_2 = -2$, $y_2 = -4$.

Ответ: $\begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} x_2 = -2 \\ y_2 = -4 \end{cases}$ или (4; 2); (–2; –4).

Пример 2. Решить систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} = 4 \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{y} = 9 \end{cases}$.

Решение. Заметим, что в первом и во втором уравнении системы есть одинаковые слагаемые $\dfrac{1}{x}$ и $\dfrac{1}{y}$. Поэтому в данном случае целесообразно сделать следующую замену переменных:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} = a \\ \dfrac{1}{y} = b \end{cases}.$$

Таким образом, исходная система примет вид: $\begin{cases} 2a + b = 4 \\ a - 3b = 9 \end{cases}$.

Решим эту систему методом алгебраического сложения:

$$\begin{cases} 2a + b = 4 \\ a - 3b = 9 \end{cases} \Bigg| \cdot 3 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 6a + 3b = 12 \\ a - 3b = 9 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\begin{cases} 6a + 3b = 12 \\ a - 3b = 9 \end{cases}}{7a \quad = 21} \quad \Leftrightarrow$$

$\begin{cases} 7a = 21 \\ a - 3b = 9 \end{cases}$. Откуда a = 3, b = $\dfrac{1}{x}$2.

Итак, данная система уравнений равносильна системе

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} = 3 \\ \dfrac{1}{y} = -2 \end{cases}. \text{ Откуда } x = \frac{1}{3},\ y = -\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$ или $\left(\dfrac{1}{3}; -\dfrac{1}{2}\right)$.

Примечание. При решении систем уравнений элементарными способами нередко приходится комбинировать методы алгебраического сложения, подстановки или введения новых переменных, а также применять различные приемы, используя специфические особенности данной системы. Различных частных приемов решения систем уравнений так много, что предусмотреть и описать их все невозможно. При использовании различных частных приемов следует помнить лишь о том, не произошло ли потери корней, и все ли найденные корни удовлетворяют данной системе уравнений. Всякий раз в процессе решения эти вопросы должны быть специально исследованы.

Графический метод. Часто решение систем уравнений элементарными методами (методами алгебраического решения: алгебраического сложения, подстановки или введения новых переменных) сопряжено с большими трудностями. Кроме того, решения систем иногда представляются с помощью радикалов в виде довольно сложных выражений, и для практического применения приходится находить их приближенные значения. Эти обстоятельства вынуждают искать другие методы решения. Одним из таких методов является графический метод решения систем уравнений.

В его основе при решении системы уравнений лежит построение линий, заданных уравнениями системы, и нахождение точек пересечения этих линий.

Предположим, что задана система двух уравнений с двумя неизвестным x и y: $\begin{cases} F_1(x, y) = 0 \\ F_2(x, y) = 0 \end{cases}$.

Каждое из этих уравнений в прямоугольной системе координат задает некоторую кривую. Если построить на одном и том же рисунке линии, соответствующие уравнениям данной системы, то если пара действительных чисел (a, b) является решением данной системы, то $F_1(a, b) = 0$ и $F_2(a, b) = 0$ будут верными числовыми равенствами, а точка с координатами (a, b) должна принадлежать обеим линиям, то есть должна быть точкой их пересечения.

Справедливо и обратное утверждение, координаты (a, b) любой точки пересечения линий, заданных уравнениями системы, удовлетворяют обоим уравнениям системы, то есть являются их решением.

Следовательно, для того, чтобы решить систему уравнений графически применяют следующий *алгоритм*:

1) строят линии, которые задают каждое из уравнений системы;
2) находят точки пересечения этих линий;
3) определяют их координаты.

Координаты каждой точки пересечения и образуют решение данной системы. Если у линий одна точка пересечения, то система уравнений имеет одно решение, если две, то два решения и т.д. Если же линии не пересекаются, то система уравнений не имеет решения.

Примечание. При графическом решении систем уравнений для более точного определения координат точек пересечения построенных линий (если это необходимо) сначала строят их в малом масштабе, что позволяет грубо приближенно определить решение данной системы. Затем части линий, которые прилегают к точкам пересечения, строят в большем масштабе и уже определяют решения с большей степенью точности.

Пример. Решить графически систему уравнений

$$\begin{cases} y - x = -1 \\ (x+3)^2 + y^2 = 16 \end{cases}.$$

Решение.

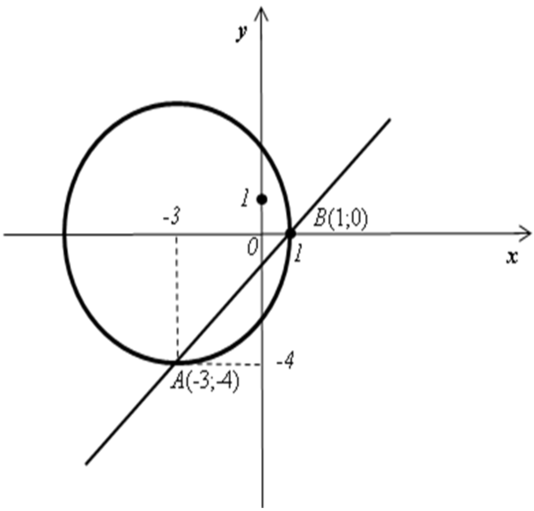
1. Заметим, что первое из уравнений системы задает прямую, проходящую через точки с координатами $(0, -1)$ и $(1, 0)$, а

второе – окружность с центром в точке (−3, 0) и радиусом, равным 4. Построим в прямоугольной системе координат эту окружность и прямую.

2. На рисунке видно, что прямая и окружность пересекаются в двух точках.

3. Координаты этих точек пересечения приближенно равняются $A(-3; -4)$ и $B(1; 0)$.

Таким образом, данная система уравнений имеет два решения. Если подставить найденные приближенные значения в оба уравнения системы, то мы получим верные равенства, следовательно, проверка показывает, что оба решения точные.



Ответ: $\begin{cases} x_1 = -3 \\ y_1 = -4 \end{cases}$; $\begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 0 \end{cases}$ или (–3; –4); (1; 0).

Системы неравенств. Аналогично понятию системы уравнений вводится понятие системы неравенств.

Пусть даны два неравенства: $f_1(x) > f_2(x)$ (1) и

$$\varphi_1(x) > \varphi_2(x) \quad (2).$$

Необходимо найти такие значения переменной x, при которых оба неравенства одновременно обращаются в верные числовые неравенства. Тогда говорят о системе неравенств (1) и (2).

Определение 1. *Неравенства* (1) и (2) *образуют систему*, если требуется отыскать такие значения переменной *x*, которые обращают *каждое* из неравенств в верное числовое неравенство.

Обозначают систему неравенств следующим образом:

$$\begin{cases} f_1(x) > f_2(x) \\ \varphi_1(x) > \varphi_2(x) \end{cases}.$$

Определение 2. Значение переменной *x*, которое обращает каждое из неравенств (1) и (2) в истинное числовое неравенство, называется *решением системы* неравенств с одной переменной.

Определение 3. С логической точки зрения система неравенств является конъюнкцией этих неравенств, а решение системы – это пересечение решений неравенств, входящих в конъюнкцию. Следовательно, чтобы найти решение системы, нужно найти множества решений неравенств (1) и (2), пересечение этих множеств и будет решением системы неравенств.

Пример 1. Решить систему неравенств $\begin{cases} 2x-7<8x+11 \\ x^2+4x-12>0 \end{cases}$.

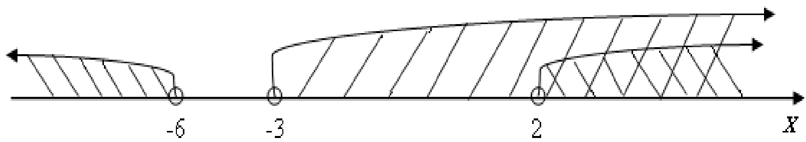
Решение. Найдем множества решений каждого из неравенств отдельно.

Первое неравенство системы: $2x-7<8x+11$,

$$-6x<18,$$

$$x > -3.$$

Второе неравенство системы $x^2 + 4x - 12 > 0$ является квадратным. Находим корни уравнения, соответствующего данному неравенству: $x_1 = -6$, $x_2 = 2$. Следовательно, решением второго неравенства является объединение промежутков $(-\infty;-6)\cup(2;+\infty)$. Изобразим множества решений каждого из неравенств системы на числовой прямой и найдем их пересечение.



Из рисунка видно, что решением данной системы является промежуток $(2;+\infty)$.

Ответ: $(2;+\infty)$.

Пример 2. Необходимо решить неравенство $|x-3|<5$.

Решение. Исходя из геометрического смысла понятия модуля числа, очевидно, что данное неравенство равносильно системе неравенств $\begin{cases} x-3<5 \\ x-3>-5 \end{cases}$. Следовательно, $\begin{cases} x<8 \\ x>-2 \end{cases}$.

Ответ: (–2; 8).

Графическое решение неравенств и систем неравенств с двумя переменными. Наряду с неравенствами, содержащими одну переменную, рассмотрим некоторые виды неравенств с двумя переменными.

Неравенство с двумя переменными можно записать в виде $f_1(x,y)<f_2(x,y)$ или $f_1(x,y)>f_2(x,y)$.

Если имеем уравнение $f_1(x,y)=f_2(x,y)$, то множество точек $M(x, y)$, координаты которых удовлетворяют этому уравнению, образуют, как правило, некоторую линию, разбивающую плоскость на несколько областей. В одних областях выполняется неравенство $f_1(x,y)<f_2(x,y)$, а в других $f_1(x,y)>f_2(x,y)$.

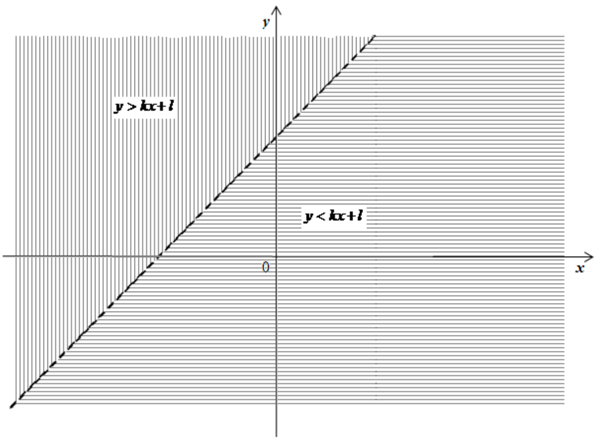
Рассмотрим только самые простые виды неравенств, содержащих две переменные.

1 вид. Неравенство вида $ax+by+c>0$.

При $b>0$ данное неравенство равносильно неравенству $y>-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$, а при $b<0$ – неравенству $y<-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$. Пусть

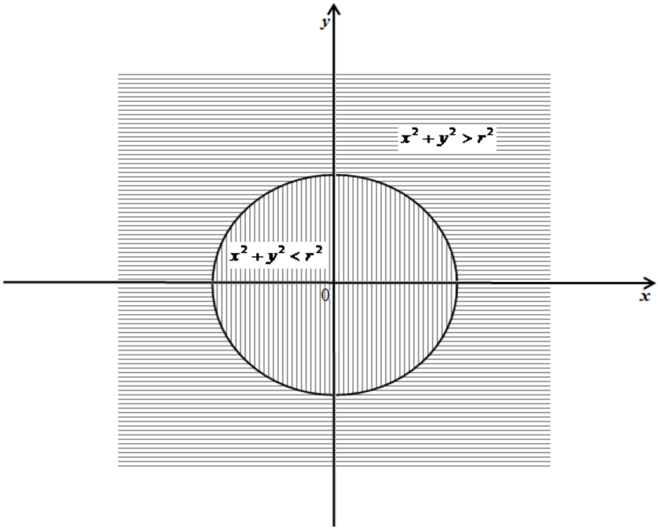
$k = -\frac{a}{b}$; $l = -\frac{c}{b}$, тогда подучим: $y > kx + l$ при $b > 0$ и $y < kx + l$ при $b < 0$

Уравнение $y = kx + l$ задает на координатной плоскости прямую. Эта прямая делит плоскость на две полуплоскости. Неравенство $y > kx + l$ выполняется над прямой, а неравенство $y < kx + l$ – под прямой.



2 вид. Неравенство вида $x^2 + y^2 < r^2$ или $x^2 + y^2 > r^2$.

Уравнение $x^2 + y^2 = r^2$ задает окружность с центром в начале координат и радиусом, равным r. Эта окружность разбивает плоскость на две части: внутреннюю (внутри круга) и внешнюю. Неравенство $x^2 + y^2 < r^2$ выполняется на множестве точек, лежащих внутри круга, а неравенство $x^2 + y^2 > r^2$ – на множестве точек, лежащих за его пределами.



Примечание. Все вышесказанное справедливо и для неравенств вида $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<r^2$ или $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2>r^2$, только в этом случае уравнение $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ задает окружность с центром в точке с координатами $(x_0;y_0)$ и радиусом, равным r.

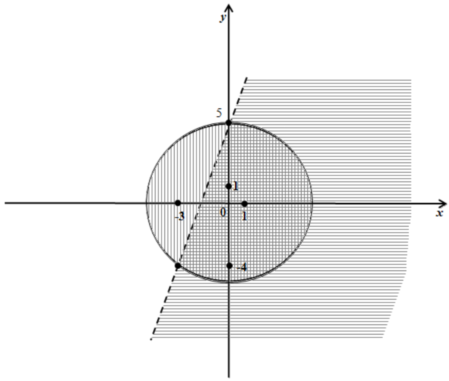
Чтобы решить систему неравенств с двумя переменными, нужно сначала решить графически каждое из неравенств системы, а затем найти общую часть (пересечение) полученных решений.

Пример. Решить графически систему неравенств

$$\begin{cases}3x-y+5>0\\x^2+y^2\le 25\end{cases}.$$

Решение. В первом неравенстве системы выразим переменную y: $y<3x+5$. Строим на координатной плоскости прямую, которую задает уравнение $y=3x+5$, и окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 5, соответствующую уравнению $x^2+y^2=5^2$.

Решение первого неравенства системы представляет собой полуплоскость, лежащую ниже прямой $y = 3x + 5$. Решение второго неравенства – это часть плоскости, находящаяся внутри круга, ограниченного окружностью $x^2 + y^2 = 5^2$, вместе с самой окружностью.



Общее решение системы неравенств – это пересечение решений каждого неравенства системы. На рисунке часть плоскости, являющаяся решением системы, отмечена двойной штриховкой. Эта область и является решением данной системы, то есть координаты любой точки, лежащей внутри двойной штриховки, обращают оба неравенства системы в верные числовые неравенства.

Примечание. Поскольку неравенство $3x - y + 5 > 0$ строгое, то точки, принадлежащие прямой $y = 3x + 5$ не входят в его решение. Чтобы показать этот факт на чертеже прямую изображают пунктирной линией.

Совокупность уравнений. Пусть даны два уравнения: $f_1(x) = f_2(x)$ (1) и $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ (2). Если ставится задача нахождения таких значений переменной, при которых хотя бы одно из уравнений (1) или (2) обращается в верное числовое равенство, то говорят о совокупности уравнений.

Определение 1. *Уравнения* (1) и (2) *образуют совокупность*, если требуется отыскать такие значения переменной x, которые обращают *хотя бы одно* из этих уравнений в верное числовое равенство.

Обозначают совокупность уравнений следующим образом:

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x)= f_2(x) \\ \varphi_1(x)=\varphi_2(x) \end{array}\right.$$

С логической точки зрения совокупность уравнений является дизъюнкцией этих уравнений. Поэтому определение совокупности уравнений также можно сформулировать и на языке математической логики.

Определение 2. *Совокупностью уравнений* (1) и (2) называется дизъюнкция предикатов $f_1(x)= f_2(x)\vee\varphi_1(x)=\varphi_2(x)$. Значение переменной *x*, которое обращает *хотя бы одно* из уравнений (1) или (2) в верное числовое равенство, называется решением совокупности уравнений.

Известно, что множество истинности дизъюнкции предикатов является объединением множеств истинности самих предикатов. Следовательно, чтобы найти решение совокупности, нужно найти множества решений уравнений (1) и (2), объединение этих множеств и будет решением совокупности уравнений.

Пример 1. Необходимо решить совокупность уравнений

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{x+13}=5 \\ x^2-14x+24=0 \end{array}\right.$$

Решение. Решим каждое из уравнений отдельно.

Первое уравнение системы $\sqrt{x+13}=5$ является иррациональным. Возведем в квадрат обе части уравнения. Получим:

$$x + 13 = 25,$$

$$x = 12.$$

Второе уравнение системы $x^2 - 14x + 24 = 0$ является квадратным. Его корни: $x_1 = 2$, $x_2 = 12$. Следовательно, решением совокупности уравнений будут корни обоих уравнений $x_1 = 2$, $x_2 = 12$.

Ответ: 2; 12.

Уравнение вида $f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)=0$ равносильно совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x)=0 \\ f_2(x)=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x)=0 \end{array}\right..$$

Пример 2. Необходимо решить уравнение

$$x^3-3x^2-4x+12=0.$$

Решение. Сгруппируем первый со вторым членом уравнения и третий с четвертым, вынесем общие множители. Уравнение примет вид: $x^2(x-3)-4(x-3)=0$, после разложения его на множители получим следующее уравнение $(x-3)(x-2)(x+2)=0$, которое равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} x-3=0 \\ x-2=0 \\ x+2=0 \end{array}\right..$$

Решая каждое из уравнений совокупности отдельно, находим их корни $x_1 = 3$; $x_2 = 2$; $x_3 = -2$. Следовательно, решением совокупности, а значит и решением исходного уравнения является объединение найденных решений $x_1 = 3$; $x_2 = 2$; $x_3 = -2$.

Ответ: –2; 2; 3.

Совокупности неравенств. Пусть даны два неравенства: $f_1(x)>f_2(x)$ (1) и $\varphi_1(x)>\varphi_2(x)$ (2). Если ставится задача нахождения таких значений переменной, при которых хотя бы одно из неравенств (1) или (2) обращается в верное числовое неравенство, то говорят о совокупности неравенств.

Определение 1. *Неравенства* (1) и (2) *образуют совокупность*, если требуется отыскать такие значения переменной x, которые обращают *хотя бы одно* из этих неравенств в верное числовое неравенство.

Обозначают совокупность неравенств следующим образом:

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x)>f_2(x) \\ \varphi_1(x)>\varphi_2(x) \end{array}\right..$$

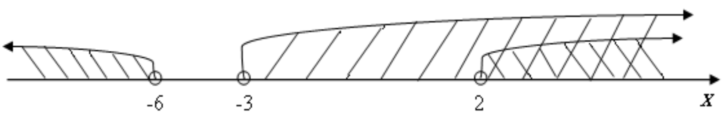
Определение 2. Всякое значение переменной x, которое обращает в истинное числовое неравенство хотя бы одно из неравенств (1) или (2), называется *решением совокупности* неравенств с одной переменной.

Определение 3. С логической точки зрения совокупность неравенств является дизъюнкцией этих неравенств и поэтому множество решений совокупности есть объединение множеств решений неравенств, которые образуют совокупность

Пример 1. Решить совокупность неравенств

$$\left[\begin{array}{l} 2x-7<8x+11 \\ x^2+4x-12>0 \end{array}\right..$$

Решение. Так как решением первого неравенства является промежуток $(-3;+\infty)$. Решением второго неравенства является объединение промежутков $(-\infty;-6)\cup(2;+\infty)$. Изобразим множества решений каждого из неравенств совокупности на числовой прямой и найдем их объединение.



Из рисунка видно, что решением данной совокупности является объединение промежутков $(-\infty;-6)\cup(-3;+\infty)$.

Ответ: $(-\infty;-6)\cup(-3;+\infty)$.

Пример 2. Решить неравенство $|x-3|>5$.

Решение. Исходя из геометрического смысла понятия модуля числа, очевидно, что данное неравенство равносильно совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} x-3>5 \\ x-3<-5 \end{array}\right.$. Следовательно, $\left[\begin{array}{l} x>8 \\ x<-2 \end{array}\right.$.

Ответ: $(-\infty;-2)\cup(8;+\infty)$.

Неравенство вида $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ (или $f(x) \cdot g(x) > 0$) равносильно дизъюнкции систем $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$, а значит, может быть записано в виде следующей совокупности систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \end{array} \right. .$$

Пример 3. Решить неравенство $\frac{5x-11}{3-2x} > 1$.

Решение. Перенесем 1 в левую часть и приведем полученное выражение к общему знаменателю: $\frac{5x-11-3+2x}{3-2x} > 0$, следовательно, $\frac{7x-14}{3-2x} > 0$. Последнее неравенство, в свою очередь равносильно совокупности систем неравенств $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 7x-14 > 0 \\ 3-2x > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 7x-14 < 0 \\ 3-2x < 0 \end{cases} \end{array} \right.$.

Следовательно, $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 2 \\ x < 1{,}5 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 2 \\ x > 1{,}5 \end{cases} \end{array} \right.$.

Таким образом, множество решений рассматриваемой совокупности является объединение решений каждой системы, то есть Ø ∪ (1,5; 2) = (1,5; 2).

Ответ: (1,5; 2).

Неравенство вида $\frac{f(x)}{g(x)}<0$ (или $f(x)\cdot g(x)<0$) равносильно дизъюнкции систем $\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)<0 \end{cases} \vee \begin{cases} f(x)<0 \\ g(x)>0 \end{cases}$, а значит, может быть записано в виде следующей совокупности систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)<0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)<0 \\ g(x)>0 \end{cases} \end{array}\right.$$.

Пример 4. Решить неравенство $\frac{5x-11}{3-2x}<1$.

Решение. Аналогично предыдущему примеру, перенесем 1 в левую часть и приведем полученное выражение к общему знаменателю, получим неравенство: $\frac{7x-14}{3-2x}<0$. Данное неравенство, в свою очередь равносильно совокупности систем неравенств $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 7x-14>0 \\ 3-2x<0 \end{cases} \\ \begin{cases} 7x-14<0 \\ 3-2x>0 \end{cases} \end{array}\right.$. Следовательно, $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>2 \\ x>1{,}5 \end{cases} \\ \begin{cases} x<2 \\ x<1{,}5 \end{cases} \end{array}\right.$.

Таким образом, множество решений рассматриваемой совокупности является объединение решений каждой системы, то есть $(2;\,+\infty) \cup (-\infty;\,1{,}5)$.

Ответ: $(-\infty;\,1{,}5) \cup (2;\,+\infty)$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Решите следующие системы уравнений:

1) $\begin{cases} x-y=3 \\ 3x+4y=2 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 2x+3y=11 \\ 3x-4y=-9 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} y-x=2 \\ y^2+4x=13 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x^2-y=8 \\ y+5=1 \end{cases}$;

5) $\begin{cases} x-y=1 \\ xy=12 \end{cases}$; 6) $\begin{cases} (x+6)(y-4)=4 \\ x+y=3 \end{cases}$;

7) $\begin{cases} x-y=7 \\ x^2+y^2=9-2xy \end{cases}$; 8) $\begin{cases} x^2+y^2=17 \\ x+xy+y=9 \end{cases}$;

9) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6}; \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{6} \end{cases}$ 10) $\begin{cases} 5x^2-6xy+5y^2=29 \\ 7x^2-8xy+7y^2=43 \end{cases}$;

11) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}=4 \\ \dfrac{1}{y}-\dfrac{2}{x}=10 \end{cases}$; 12) $\begin{cases} \dfrac{6}{x-y}-\dfrac{8}{x+y}=-2 \\ \dfrac{9}{x-y}+\dfrac{10}{x+y}=8 \end{cases}$.

2. Найдите множество действительных корней уравнения:

1) $\dfrac{3}{x}+\dfrac{3}{x+2}=4$; 2) $\dfrac{x^2-5x-6}{x+1}=0$;

3) $2x(x+5)=3(x+5)$; 4) $(x^2+4)(x-3)x=0$;

5) $x^3+3x^2+3x+1=0$; 6) $x^4-7x^2+12=0$;

7) $2x^4-5x^3-18x^2+45x=0$; 8) $x^3-3x^2=4$;

9) $(x-1)\left(2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+2}\right)=0$.

3. Следующие задачи решите с помощью составления систем уравнений:

1) Два поезда вышли одновременно навстречу друг другу с двух станций, расстояние между которыми равно 400 км. Через 4 часа расстояние между ними сократилось до 40 км. Если бы один из поездов вышел на 1 час раньше другого, то их встре-

ча произошла бы на середине пути. Определите скорости поездов.

2) Теплоход отплыл из порта А в порт В. Через 7,5 часов вслед за ним из порта А вышел катер. На половине пути от А до В катер догнал теплоход. Когда катер прибыл в В теплоходу осталось плыть 0,3 всего пути. Сколько времени потребовалось теплоходу на весь путь от А до В, если скорости катера и теплохода постоянны на протяжении всего плавания.

3) Каждый из двух рабочих одинаковой квалификации может выполнить заказ за 15 часов. Через 3 часа после того, как один из них приступил к выполнению заказа, к нему присоединился второй рабочий, и работу над заказом они довели до конца уже вместе. Сколько часов потребовалось на выполнение всего заказа?

4) Две машинистки, работая вместе, печатают в час 44 страницы текста. Первые 25% двухсотстраничной рукописи печатала только одна первая машинистка, затем к ней присоединилась вторая, а последние 20% текста печатала только вторая машинистка. Сколько страниц в час печатает каждая машинистка, если на перепечатывание всей рукописи ушло 6 часов 40 минут, а первая машинистка работает медленнее второй?

4. Решите неравенство:

1) $x^3(x-5)\ge 0$;
2) $x^2 - x \le 12$;
3) $\dfrac{x}{20-x} = \dfrac{1}{x}$;
4) $(x^2-9)(x-7)(x+11) < 0$;
5) $-\dfrac{21x+39}{x^2+x-2} \ge -\dfrac{1}{x+2}$.

5. Изобразите на плоскости множества точек, заданных неравенствами:

1) $y \ge 5x-3$;
2) $3x-5y<4$;
3) $(x-4)^2+(y-1)^2<25$;
4) $(x+3) \; + y^2 \ge 4$;
5) $x^2+3<y$.

6. Решите графически системы неравенств:

1) $\begin{cases} 2x - y + 2 > 0 \\ x + y + 1 < 0 \end{cases}$;

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 25 \\ x + y > -1 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 16 \\ y > 2 \end{cases}$;

4) $\begin{cases} y < 9 - x \\ y - x^2 \ge 0 \end{cases}$;

5) $\begin{cases} y \ge x^2 \\ x^2 < 16 - y \end{cases}$.

6. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Общие аксиомы конструктивной геометрии. Раздел геометрии, изучающий геометрические построения, называется *конструктивной геометрией*. Основным (неопределяемым) понятием конструктивной геометрии является понятие «построить фигуру». Основные предложения формулируются в виде общих *аксиом конструктивной геометрии* аксиом.

1. Каждая данная фигура построена.

Если о какой-либо фигуре сказано, что она дана, то это означает, что она уже изображена, начерчена, то есть построена.

2. Если построены две (или более) фигуры, то построено и объединение этих фигур.
3. Если построены две фигуры, то можно установить, будет ли их пересечение пустым множеством или нет.
4. Если пересечение двух построенных фигур не пусто, то оно построено.
5. Если построены две фигуры, то можно установить, будет ли их разность пустым множеством или нет.
6. Если разность двух построенных фигур не является пустым множеством, то она построено.
7. Можно построить точку, принадлежащую построенной фигуре.
8. Можно построить точку, не принадлежащую построенной фигуре

Аксиомы циркуля и линейки. Для построения геометрических фигур, обладающих некоторыми указанными свойствами, пользуются различными чертежными инструментами. Простейшими из них являются односторонняя линейка (в дальнейшем просто линейка), двусторонняя линейка, масштабная линейка, угольник, циркуль и др. Различные чертежные инструменты позволяют выполнять различные построения. Свойства чертежных инструментов, используемые для геометрических построений, также выражаются в форме аксиом.

Поскольку в школьном курсе геометрии рассматриваются построения геометрических фигур с помощью циркуля и линейки, остановимся на рассмотрении основных построений, выполняемых именно этими чертежными инструментами.

Итак, с помощью линейки можно выполнить следующие геометрические построения:

1) построить отрезок, соединяющий две построенные точки;

2) построить прямую, проходящую через две построенные точки;

3) построить луч, исходящий из построенной точки и проходящий через другую построенную точку.

Циркуль позволяет выполнить следующие геометрические построения:

1) построить окружность, если построен ее центр и отрезок, равный радиусу окружности;

2) построить любую из двух дополнительных дуг окружности, если построены центр окружности и концы этих дуг.

Построения, о возможности которых говорится в аксиомах циркуля и линейки, а также в общих аксиомах 1-8, называются *основными построениями* для данного набора инструментов.

Основные задачи на построение. Задача на построение заключается в том, чтобы с помощью определенного набора чертежных инструментов построить фигуру, если дана другая фигура и указаны соотношения между данной и искомой фигурами.

Определение 1. *Решением задачи* называется любая фигура, удовлетворяющая ее условию.

Определение 2. Найти решение задачи на построение – значит *указать конечную последовательность основных построений*, после выполнения которых искомая фигура будет построена.

Может случиться, что задача на построение имеет не одно решение, а несколько. Это означает существование нескольких различных фигур, удовлетворяющих всем условиям задачи.

Определение 3. *Решить задачу* на построение – значит найти все ее решения или показать, что решений нет.

Решение задачи на построение часто приводит к большому числу логических «шагов», то есть основных построений. Поэтому на практике часто используют решения каких-либо вспомогательных задач в целом, не расчленяя их на основные построения. Такие задачи рассматриваются в школьном курсе геометрии.

Определение 4. Будем называть решения каких-либо вспомогательных задач в целом, не расчленяя их на основные построения *элементарными задачами* на построение и использовать при решении других задач без дополнительных разъяснений.

К числу элементарных задач на построение договоримся относить следующие задачи.

1. Деление данного отрезка пополам.
2. Деление данного угла пополам.
3. Построение на данной прямой отрезка, равного данному.
4. Построение угла, равного данному.
5. Построение прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярной данной прямой.
6. Деление отрезка в данном отношении.
7. Построение касательной к окружности, проходящей через данную на ней точку.
8. Построение треугольника по трем данным сторонам.
9. Построение треугольника по стороне и двум прилежащим к ней углам.
10. Построение треугольника по двум сторонам и углу между ними.
11. Построение прямоугольного треугольника по гипотенузе и катету.

Следует отметить, сто представленный перечень элементарных задач на построение является условным и может быть расширен добавление любой ранее решенной задачи.

Примеры решения некоторых элементарных задач.

Задача 1. Построить на данной прямой отрезок, равный данному.

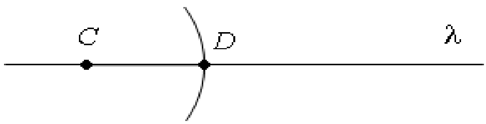
Дано: прямая ℓ и отрезок AB.

Построить: отрезок $CD = AB$, $CD \subset \ell$.

Решение.

Построение. Строим последовательно:

1. $C \in \ell$;
2. окружность $\omega(C, AB)$ (аксиома 1 циркуля);
3. точка D пересечения окружности ω с прямой ℓ, то есть $\{D\} = \omega \cap \ell$ (аксиома 4 общая);
4. CD – искомый отрезок.

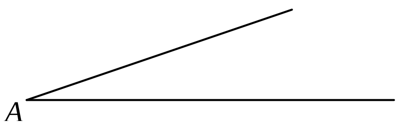


Доказательство. По построению $C \in \ell$ и $D \in \ell$, следовательно, $CD \subset \ell$ (по аксиоме стереометрии). $CD = AB$ как радиус построенной окружности.

Задача 2. Построить угол, равный данному.

Дано: угол A.

Построить: угол O равный углу A.



Решение.

Построение. Строим последовательно:

1) $O \notin AB$ и $O \notin AC$, где *AB* и *AC* стороны угла *A*, отложим полупрямую *OD* с начальной точкой *O* (аксиома 3 линейки);

2) окружность $\omega_1(A, r)$, где *r* – произвольный радиус (аксиома 1 циркуля);

3) точки *B* и *C* пересечения окружности ω со сторонами угла *A* (аксиома 4 общая);

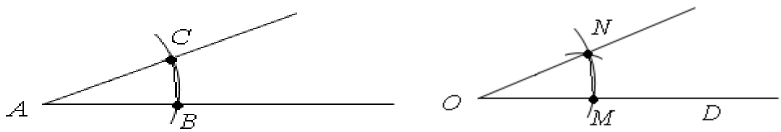
4) окружность $\omega_2(O, AB)$ (аксиома 1 циркуля);

5) точка *M* пересечения окружности ω_2 с полупрямой *OD*, то есть $\{M\} = \omega_2 \cap OD$ (аксиома 4 общая);

6) окружность $\omega_3(M, BC)$ (аксиома 1 циркуля);

7) точка *N* пересечения окружностей ω_2 и ω_3 в нужной полуплоскости, то есть $\{N\} = \omega_2 \cap \omega_3$ (аксиома 4 общая);

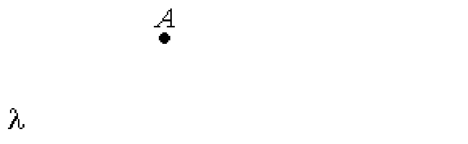
8) $\angle NOM$ – искомый угол.



Доказательство. По построению $AB = OM$ и $AC = ON$ как радиусы двух окружностей с равными радиусами, аналогично, $BC = MN$, следовательно, $\Delta ABC = \Delta OMN$ (по трем сторонам). $\angle BAC = \angle MON$ как углы, лежащие в равных треугольников против равных сторон.

Задача 3. Построить прямую, проходящую через данную точку параллельно данной прямой.

Дано: прямая ℓ и точка $A \notin \ell$.



Построить: прямую

$AB \parallel \ell$.

Решение.

Построение. Строим последовательно:

1) окружность $\omega_1(A,r)$, где r – произвольный радиус, такой что $\omega_1(A,r) \cap \ell \neq \varnothing$ (аксиома 1 циркуля);

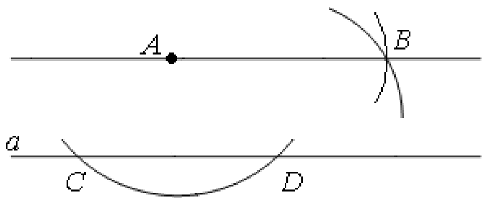
2) точки C и D пересечения окружности ω_1 с прямой ℓ, то есть $\{C,D\} = \omega_1 \cap \ell$ (аксиома 4 общая);

3) окружность $\omega_2(D, AC)$ (аксиома 1 циркуля);

4) окружность $\omega_3(A, CD)$ (аксиома 1 циркуля);

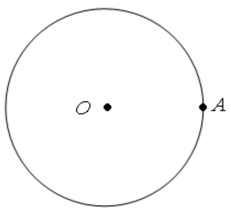
5) точку $B \in \omega_2 \cap \omega_3$ и лежащую в одной полуплоскости с точкой A относительно прямой ℓ (аксиома 4 общая);

6) AB – искомая прямая (аксиома 2 линейки) (рис).



Доказательство. По построению $BD = AC$; $AB = CD$, значит, четырехугольник $CABD$ – параллелограмм (по признаку), следовательно, $AB \parallel CD$.

Задача 4. Построить касательную к окружности, проходящую через данную на ней точку.

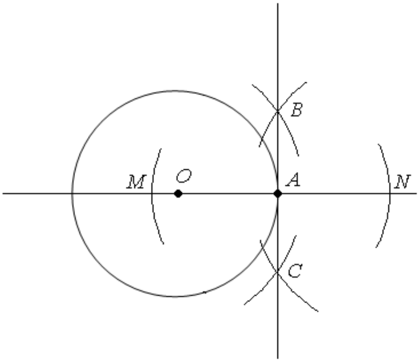


Дано: окружность $\omega(O,r)$ и точка $A \in \omega$.

Построить: касательную AB.

Решение.

Построение. Строим последовательно:



1) прямая AO (аксиома 2 линейки);

2) окружность $\omega_1(A, r_1)$, где r_1 – произвольный радиус (аксиома 1 циркуля);

3) точки M и N пересечения окружности ω_1 и прямой AO, то есть $\{M, N\} = \omega_1 \cap AO$ (аксиома 4 общая);

4) окружность $\omega_2(M, r_2)$, где r_2 – произвольный радиус, такой что $r_2 > r_1$ (аксиома 1 циркуля);

5) окружность $\omega_3(N, r_3)$ (аксиома 1 циркуля);

6) точки B и C пересечения окружностей ω_2 и ω_3, то есть $\{B, C\} = \omega_2 \cap \omega_3$ (аксиома 4 общая);

7) BC – искомая касательная (аксиома 2 линейки).

Доказательство. По построению имеем: $MB = MC = NB = NC = r_2$. Значит, четырехугольник $MBNC$ – ромб. Точка касания A является точкой пересечения диагоналей MN и BC ромба, следовательно, прямая BC перпендикулярна радиусу окружности (по свойству ромба), значит, прямая BC – касательная к данной окружности.

Этапы решения задач на построение. Схема решения задачи на построение обычно состоит из четырех этапов: анализ, построение, доказательство и исследование. Указанную схему не следует рассматривать как неизменную и всякий раз необходимую. В зависимости от особенностей той или иной задачи вполне допустимы, а иногда естественны отклонения от указанных этапов. Рассмотрим характеристику каждого этапа.

1. Анализ в рассматриваемой схеме понимается как поиск способа решения задачи на построение (если способ решения известен, то анализ проводить не нужно). На этом этапе необходимо подметить зависимости между данными и схемой фигурой. Чтобы упростить поиск зависимостей, целесообразно предположить, что задача решена и построить предварительный чертеж-набросок, на котором изобразить данные и искомые фигуры. Чертеж-набросок выполняется от руки, начиная с изображения искомой фигуры. Затем добавляют данные, стараясь сохранить отношения, указанные в условии задачи.

Если вспомогательный чертеж не указывает способ построения, то стараются найти вспомогательную фигуру или часть искомой фигуры, чтобы затем дополнить ее до всей искомой фигуры. Иногда бывает полезно использовать различные дополнительные построения.

2. Построение сводится к тому, чтобы указать последовательность основных построений или элементарных задач, которые достаточно выполнить, чтобы искомая фигура была построена. При этом каждый шаг построения, как правило, сопровождается графическим оформлением на чертеже.

3. Доказательство позволяет установить, что построенная фигура действительно удовлетворяет всем условиям, поставленным в задаче.

4. Исследование состоит в рассмотрении всевозможных случаев решения задачи в зависимости от элементов и соотношений между ними. Обычно при построении ограничиваются отысканием одного какого-либо решения, в то время как для полного решения задачи необходимо получить ответы на следующие вопросы: всегда ли можно выполнить построение искомым способом; можно ли и как построить искомую фигуру, если избранный способ применить нельзя; сколько решений имеет задача при каждом возможном выборе данных? Другими

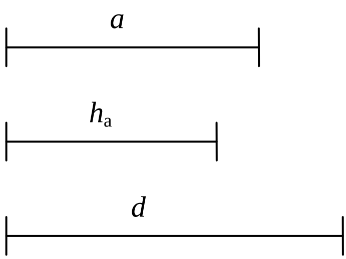
словами, исследование должно определить условия разрешимости задачи и определить число решений.

Для большей полноты исследования целесообразно проводить его по ходу построения. При этом относительно каждого шага построения устанавливается его выполнимость и однозначность.

В целях иллюстрации описанной схемы рассмотрим решение следующей задачи на построение.

Задача. Построить параллелограмм по основанию a, высоте h и одной из диагоналей d.

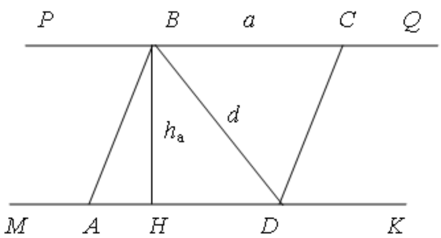
Дано: основание – a; высота параллелограмма – h; диагональ параллелограмма – d.



Построить: параллелограмм $ABCD$.

Решение.

1. Анализ. Предположим, что искомый параллелограмм $ABCD$ построен.



$AD = a$ – данное основание параллелограмма, $BH = h$ – данная высота, $BD = d$ – диагональ параллелограмма. Построить параллелограмм *ABCD* значит построить четыре точки – его вершины. Так как построение вершин *A* и *D* (концов отрезка *AD*) затруднений не вызывает, то задача сводится к построению вершины *B* и *C*. Отмечаем на чертеже-наброске данные элементы: $AD = a$, $BH = h$, $BD = d$.

Устанавливаем связи и зависимости между элементами параллелограмма. Отмечаем, что противоположные стороны *AD* и *BC* лежат на параллельных прямых, расстояние между которыми равно высоте *h*. Вершина *B* лежит на пересечении прямой ℓ и *BD*. $BC = a$ (по свойству параллелограмма). Поэтому можно построить треугольник *ABD* и затем достроить его до параллелограмма *ABCD*.

Построение. Строим последовательно:

1) на произвольной прямой откладываем отрезок $AD = a$, где *a* – данное основание параллелограмма (элементарная задача 3) (рис.);

2) через произвольную точку *M* прямой *AD* строим прямую $MP \perp AD$ (элементарная задача 6);

3) на прямой *MP* откладываем отрезок $AN = h$, где *h* – данная высота параллелограмма (элементарная задача 3);

4) через точку *N* строим прямую $NK \| AD$ (элементарная задача 5);

5) окружность $\omega(D, d)$ (аксиома 1 циркуля);

6) точку B пересечения прямой *NK* и окружности ω, то есть $B = NK \cap \omega$ (аксиома 4 общая);

7) на луче *BK* откладываем отрезок $BC = a$ (элементарная задача 3);

8) отрезки *AB* и *CD*.

Доказательство. Рассмотрим четырехугольник *ABCD*. Его противоположные стороны *AD* и *BC* параллельны, так как по построению лежат на параллельных прямых *AD* и *NK*. По построению $AD = a$ и $BC = a$, следовательно, $AD = BC$. Значит *ABCD* – параллелограмм (по признаку), у которого $AD = a$, $BD = d$, а высота равна *h*, так как расстояние между параллельными прямыми *AD* и *NK* равно *h* (по построению). Следовательно, *ABCD* – искомый параллелограмм.

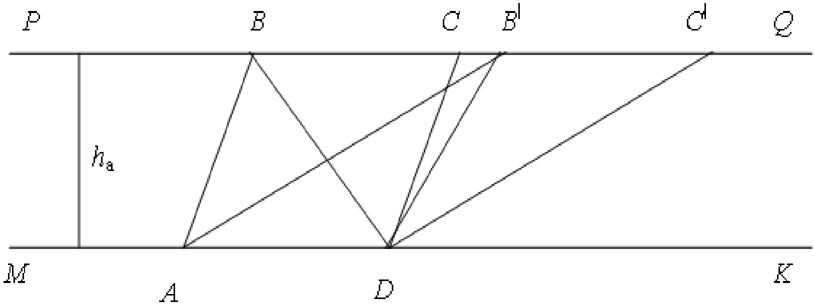
Исследование. Проверим возможность построения параллелограмма $ABCD$ непосредственно по шагам алгоритма построения.

Построить отрезок $AD = a$ на произвольной прямой всегда можно, и притом единственным образом.

Параллельные прямые AD и NK на расстоянии h всегда можно построить, и притом единственным образом.

Окружность, проведенная из центра D радиусом d, будем иметь общие точки с прямой PQ тогда и только тогда, когда $d \geq h_a$. Если $d = h_a$, то получится одна общая точка B, если же $d > h_a$, то две общие точки B и B'.

Таким образом, решение возможно, если $d \geq h_a$. Если $d = h_a$, то задача имеет единственное решение, если же $d > h_a$, то два решения: параллелограммы $ABCD$ и $AB'C'D$ (рисунок).



Основные методы решения геометрических задач на построение. При решении геометрических задач на построение часто используют некоторые специальные методы. Основными из них являются следующие:

1) метод пересечения фигур;
2) метод геометрических преобразований;
3) алгебраический метод.

Рассмотрим каждый из этих методов.

Метод пересечения фигур. Геометрическую фигуру на плоскости можно задать различными способами: как пересечение или объединение данных фигур; с помощью уравнения с двумя переменными и так далее. Здесь остановимся на рассмотрении фигур, заданных путем указания свойства, которым обладает каждая ее точка.

Определение 1. *Геометрическим местом точек* называется фигура, состоящая из всех тех и только тех точек плоскости, которые обладают определенным свойством.

В дальнейшем, для краткости, вместо «геометрическое место точек» будем писать ГМТ.

Определение 2. Свойство, характеризующее то или иное геометрическое место точек, называется *характеристическим* свойством.

Из данного определения следует, что если фигура Ф есть геометрическое место точек, обладающих указанным свойством, то для нее выполняются следующие условия:

1) каждая точка, принадлежащая фигуре Ф, обладает этим свойством;

2) каждая точка, обладающая указанным свойством, принадлежит фигуре Ф.

Определение 3. Метод пересечения фигур для решения задач на построение называют еще *методом геометрических мест точек*.

Сущность этого метода заключается в следующем. Задачу на построение сводят к нахождению некоторой точки *X*, удовлетворяющей двум независимым условиям φ_1 и φ_2, вытекающим из требований задачи. Затем строят фигуры:

$$\Phi_1 = \{M | M \text{ удовлетворяет условию } \varphi_1\} \text{ и}$$

$$\Phi_2 = \{M | M \text{ удовлетворяет условию } \varphi_2\}.$$

Так как точка *X* должна удовлетворять условиям φ_1 и φ_2, то $X \in \Phi_1 \cap \Phi_2$. Каждая точка фигуры $\Phi_1 \cap \Phi_2$ дает возможность найти некоторое решение задачи.

Для того чтобы точка *X* была построена, необходимо построить фигуры Φ_1 и Φ_2. Фигуры допускают построение с помощью циркуля и линейки, если являются прямыми или окружностями, или состоят из частей фигур. Поэтому при решении задач на построение с помощью вышеуказанных инструментов наибольший интерес представляют множества точек, являющихся прямыми или окружностями.

Напомним простейшие ГМТ, известные из школьного курса геометрии.

1. ГМТ, равноудаленных от двух фиксированных точек *A* и *B*, есть серединный перпендикуляр к отрезку *AB*.
2. ГМТ, равноудаленных от данной прямой, есть две прямые, параллельные данной и отстоящие от нее на данном расстоянии.
3. ГМТ, равноудаленных от двух данных параллельных прямых, есть прямая линия, являющаяся их осью симметрии.
4. ГМТ, равноудаленных от сторон угла, есть биссектриса этого угла.
5. ГМТ, равноудаленных от двух заданных пересекающихся прямых, есть взаимно перпендикулярные прямые, содержащие биссектрисы углов, образованных прямыми.
6. ГМТ, находящихся на данном расстоянии *r* от данной точки *O*, есть окружность $\omega(O, r)$.
7. ГМТ, из которых данный отрезок виден под прямым углом, есть окружность (без точек, являющихся концами отрезка), построенная на данном отрезке как на диаметре.

Рассмотрим задачу, решение которой проведем методом пересечения фигур.

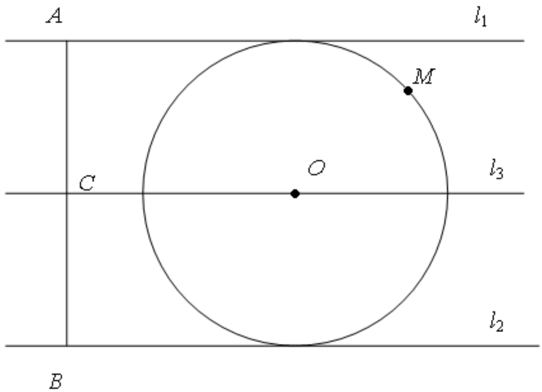
Задача. Построить окружность, проходящую через данную точку *M* и касающуюся двух данных параллельных прямых ℓ_1 и ℓ_2.

Дано: прямые ℓ_1 и ℓ_2, $\ell_1 \| \ell_2$; точка *M*.

Построить: окружность ω, такую, что $M \in \omega$ и ω касается прямых ℓ_1 и ℓ_2.

Решение.

Анализ. Предположим, что задача решена и искомая окружность построена.



Радиус этой окружности, очевидно, равен половине расстояния d между параллельными прямыми ℓ_1 и ℓ_2, то есть $r=\dfrac{d}{2}$, а центр O удовлетворяет двум условиям:

1) он равноудален от данных прямых ℓ_1 и ℓ_2;

2) он отстоит от данной точки M на расстоянии $\dfrac{d}{2}$.

Отсюда вытекает построение.

Построение. Последовательно строим:

1) A – произвольная точка прямой ℓ_1, то есть $A \in \ell_1$ (аксиома 7 общая) (рис.);

2) $AB \perp \ell_2$ (элементарная задача 6);

3) C – середина отрезка AB (элементарная задача 1);

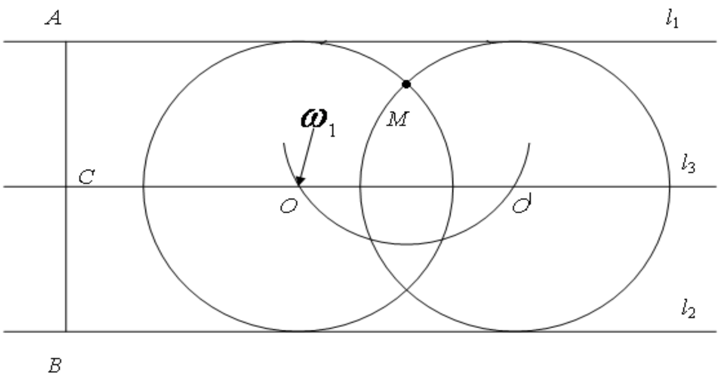
4) ГМТ, равноудаленных от прямых ℓ_1 и ℓ_2. Это есть прямая ℓ_3, проходящая через точку C и параллельная ℓ_1 и ℓ_2 (элементарная задача 5);

5) ГМТ, удаленных от данной точки M на расстояние $\frac{d}{2}$, то есть окружность $\omega_1(M, \frac{d}{2})$ (аксиома 1 циркуля);

6) точка $O \in \ell_3 \cap \omega_1$ (аксиома 4 общая);

7) окружность $\omega_2(O, \frac{d}{2})$ – искомая (аксиома 1 циркуля).

Доказательство. Окружность ω_2 касается данных прямых ℓ_1 и ℓ_2, так как ее центр O отстоит от этих прямых на одинаковом расстоянии, равном $\frac{d}{2}$ (по построению). Окружность ω_2 проходим через точку M, так как по построению расстояние от точки M до O равно $\frac{d}{2}$, то есть радиусу окружности ω_2. Следовательно, ω_2 – искомая окружность.



Исследование. Построения 1) – 5) всегда выполнимы. Однако при построении 6) возможны три случая.

1. Точка M расположена между данными прямыми ℓ_1 и ℓ_2. В этом случае задача имеет два решения $\omega_2(O, \frac{d}{2})$ и

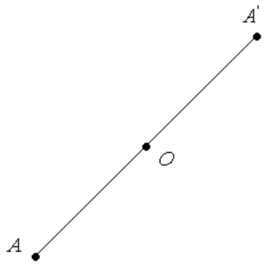
$\omega_2'(O', \frac{d}{2})$. Других решений нет, так как прямая и окружность не могут пересекаться более чем в двух точках (рис.).

2. Точка M лежит на одной из прямых ℓ_1 и ℓ_2. Задача имеет одно решение.

3. Точка M не лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2. в этом случае задача не имеет решения.

Метод геометрических преобразований. Метод геометрических преобразований при решении задач на построение заключается в том, что кроме данных фигур и искомой фигуры рассматривают еще вспомогательные фигуры, которые получаются из этих фигур или их частей при помощи подходящего геометрического преобразования. При удачном выборе преобразования анализ задачи, а значит, и построение можно значительно облегчить.

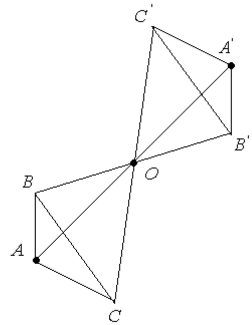
В зависимости от того, какое геометрическое преобразование использовали при решении той или иной задачи, говорят о методе симметрии, методе параллельного переноса, методе вращения, методе геометрических преобразований.



Симметрия относительно точки (центральная симметрия). Пусть O – фиксированная точка и A – произвольная точка плоскости. Точка A' называется симметричной точке A относительно точки O, если точки A, O, A' лежат на одной прямой и $OA = OA'$. Точка симметричная точке O, есть сама эта точка.

Определение 1. Пусть F – данная фигура и O – фиксированная точка плоскости. Преобразование фигуры F в фигуру F', при котором каждая точка A фигуры F переходит в точку A' фигуры F', симметричную A относительно точки O, называется *преобразованием симметрии относительно точки O.*

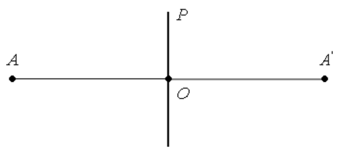
На рисунке выполнено преобразование треугольника ABC в симметричный ему относительно точки O треугольник $A'B'C'$.



Определение 2. Если преобразование симметрии относительно точки O переводит фигуру в себя, то фигура называется *центрально симметричной*, а точка O – ее *центром симметрии*.

Например, центрально симметричными являются параллелограмм (центром симметрии в нем является точка пересечения диагоналей), окружность с центром в точке O.

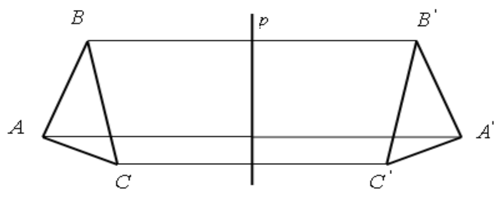
Симметрия относительно прямой (осевая симметрия). Пусть p фиксированная прямая. Тогда A' называется симметричной точке A относительно p, если прямая AA' перпендикулярна прямой p и $OA = OA'$, где O – точка пересечения прямых AA' и p.



Точка, симметричная точке A', есть точка A.

Если точка A лежит на прямой p, то симметричная ей точка есть сама точка A.

Определение 1. Пусть F – данная фигура и p – фиксированная прямая. Преобразование фигуры F в фигуру F', при котором каждая точка A фигуры F переходит в точку A' фигуры F', симметрично относительно прямой p, называется *преобразованием симметрии относительно прямой p*.



На рисунке изображено преобразование треугольника ABC в треугольник $A'B'C'$, симметричный относительно прямой p.

Определение 2. Если преобразование симметрии относительно прямой p переводит фигуру F в себя, то фигура называется *симметричной относительно прямой* p, прямая p называется *осью симметрии фигуры*.

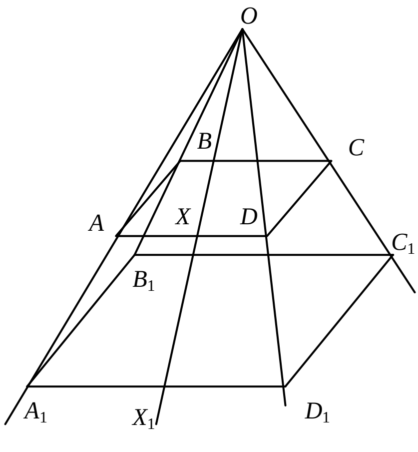
Например, осями симметрии прямоугольника являются прямые, проходящие через точку пересечения его диагоналей параллельно сторонам.

Гомотетия. Пусть F – данная фигура и O – фиксированная точка. Проведем через произвольную точку X фигуры F луч OX и отложим на нем отрезок OX_1, равный $k \cdot OX$, где k – положительное число.

Определение 1. Преобразование фигуры F, при котором каждая ее точка X переходит в такую точку X_1, что $OX_1 = k \cdot OX$, называется *гомотетией* относительно центра O.

Определение 2. Число k называется *коэффициентом* гомотетии.

Определение 3. Фигуры F и F_1 называются *гомотетичными*.



На рисунке четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ гомотетичен четырехугольнику $ABCD$. Центр гомотетии – точка O, а ее коэффициент равен 2.

Рассмотрим примеры задач, решаемых методом преобразований. При этом с целью сокращения записей, ссылки на элементарные построения и аксиомы циркуля и линейки приводить не будем.

Задача 1. На прямой ℓ, пересекающей отрезок AB, найти такую точку C, чтобы биссектриса угла ACB была лучом прямой ℓ.

Дано: отрезок AB и прямая ℓ, такая, что $\ell \cap AB \neq \varnothing$.

Построить: точку C, такую, что биссектриса $\angle ACB$ принадлежит ℓ.

Решение.

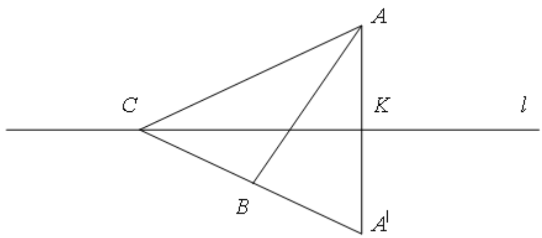
Анализ. Предположим, что задача решена и искомая точка C найдена. Построив точку A', симметричную точке A относительно прямой ℓ, получим: $AK = A'K$, $\angle CAK = \angle CKA' = 90°$. Поэтому $\Delta CKA = \Delta CKA'$ и значит, $\angle ACK = \angle A'CK$. Таким образом, $B \in A'C$ или, говоря иначе, точка C лежит на прямой $A'B$.

Построение. Строим последовательно:

1) строим точку A' симметричную точке A относительно ℓ;

2) прямую $A'B$;

3) $C = \ell \cap A'B$ – искомая точка.



Доказательство очевидно и вытекает из построения.

Исследование. Рассматривая построения 1) – 3), замечаем следующее:

1) если точки A и B удалены от прямой ℓ на разные расстояния, то задача имеет единственное решение;

2) если точки A и B находятся на одинаковом расстоянии от прямой ℓ и $A' \neq B$, то $A'B \| \ell$ и задача не имеет решения;

3) если $A' = B$, то есть точки A и B симметричны относительно прямой ℓ, то любая точка этой прямой удовлетворяет условию задачи, то есть задача имеет бесконечное множество решений.

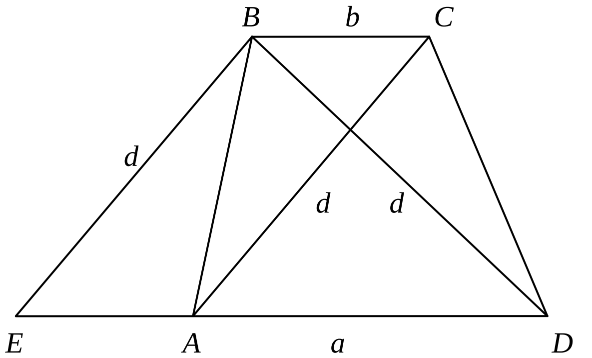
Задача 2. Построить трапецию по основаниям a и b и диагоналям d_1 и d_2.

Дано: a, b – основания трапеции; d_1, d_2 – диагонали трапеции.

Построить: трапецию.

Решение.

Анализ. Пусть $ABCD$ – искомая трапеция.



Используя параллельный перенос, перенесем диагональ d_1 на вектор $\overrightarrow{CB}$ в положение EB; точка A при этом сместится в точку E, а точка C в точку B. Тогда треугольник EBD можно построить по трем сторонам: $EB = d_1$; $BD = d_2$; $ED = b + a$. Затем, перенеся EB в прежнее положение на вектор $\overrightarrow{BC}$, получим искомую трапецию.

Построение. Строим последовательно:

1) ΔEBD по трем сторонам: $ED = b + a$; $EB = d_1$; $BD = d_2$;

2) сторону EB перенесем на вектор $\overrightarrow{EA}$ в положение AC;

3) $ABCD$ – искомая трапеция.

Доказательство. По свойству параллельного переноса $BC \parallel AD$, $BC = b$ и $AC = d_1$. Следовательно, в трапеции $ABCD$: $BC = b$; $AC = d_1$; $BD = d_2$; $AD = (b + a) - b = a$.

Исследование. Построение треугольника *EBD* по трем сторонам возможно и единственно при выполнении условия $|d_1 - d_2| < a + b < d_1 + d_2$.

Алгебраический метод. Во многих случаях приходится решать следующую задачу. Даны отрезки $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, …, $\bar{t}$, длины которых при выбранной единице измерения соответственно равны *a, b, c*, …, *t*. Требуется построить отрезок $\bar{x}$, длина которого *x* при той же единице измерения выражается через *a, b, c*, …, *t* заданной формулой $x = f(a, b, c, \ldots t)$.

В школьном курсе геометрии рассматриваются построения с помощью циркуля и линейки отрезков, длины которых заданы простейшими формулами. При этом «отрезок» и «длина отрезка» отождествляются. Напомним построения отрезков по основным формулам.

1) $x = a + b$;
2) $x = a - b \quad (a > b)$;
3) $x = n \cdot a$, где *n* – натуральное число;
4) $x = \dfrac{a}{n}$, где *n* – натуральное число;
5) $x = \dfrac{m}{n} a$, где *m* и *n* – натуральные числа;
6) $x = \dfrac{a \cdot b}{c}$ (построение отрезка, четвертого пропорционального к трем данным);
7) $x = \sqrt{a \cdot b}$ (построение среднего пропорционального двух данных отрезков);
8) $x = \sqrt{a^2 + b^2}$;
9) $x = \sqrt{a^2 - b^2} \quad (a > b)$.

Здесь *a, b* и *c* – длины данных отрезков.

Построение отрезков, заданных формулами 1) – 3), достаточно просто, поэтому здесь рассматривать их не будем. Рассмотрим построение некоторых отрезков, заданных формулами 4) – 9).

Задача 4. $x = \frac{a}{n}$, где n – натуральное число.

Построение. Строим последовательно:

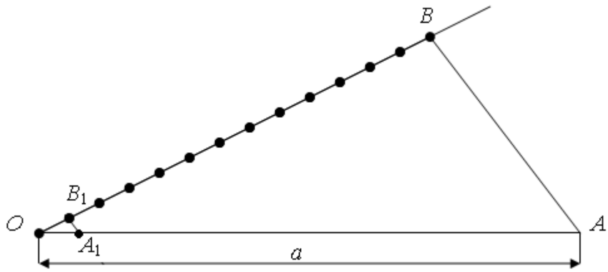
а) строим луч, выходящий из конца O отрезка $OA=a$ под произвольным углом к нему, отличным от $180°$;

б) откладываем на этом луче n раз произвольный отрезок OB_1, $OB = n \cdot b$;

в) проводим прямую BA;

г) проводим прямую $B_1A_1 \| BA$, где $A_1 = B_1A_1 \cap BA$;

д) $x = OA_1$ – искомый отрезок.



Доказательство. Так как $B_1A_1 \| BA$ и $OB_1 = \frac{OB}{n}$, то по теореме Фалеса $OA_1 = \frac{OA}{n}$.

Задача 5. $x = \frac{m}{n}a$.

Построение. Для построения отрезка, заданного формулой $x = \frac{m}{n}a$, перепишем эту формулу в виде $x = \frac{ma}{n}$. Тогда достаточно выполнить следующие построения:

а) отрезок ma;

б) отрезок $x = \frac{ma}{n}$, получившийся делением отрезка ma на n равных частей (см. задачу 4).

Задача 7. $x=\sqrt{a\cdot b}$.

Построение.

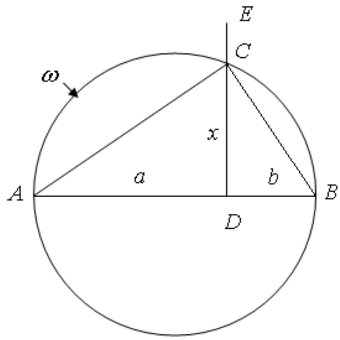
а) строим отрезки $AD=a$, $DB=b$ так, что $AB=a+b$;

б) окружность ω на AB как на диаметре;

в) $DE\perp AB$;

г) $C=\omega\cap DE$;

д) $CD=x$ – искомый отрезок.



Доказательство. Так как AB – диаметр окружности ω, то $\angle ACB=90°$, следовательно, треугольник ABC – прямоугольный. Отрезок CD является высотой прямоугольного треугольника, опущенной из вершины прямого угла на гипотенузу. Значит, длина отрезка CD является средней пропорциональной величиной между отрезками a и b, то есть $x=\sqrt{a\cdot b}$.

Задача 8. $x=\sqrt{a^2+b^2}$.

Отрезок x строится как гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами a и b.

Задача 9. $x=\sqrt{a^2-b^2}$ $(a>b)$.

Отрезок x строится как катет прямоугольного треугольника с гипотенузой a и катетом b.

К рассмотренным построениям можно свести построение отрезков, заданных более сложными формулами. Приведем пример.

Задача. Построить отрезок $x=\sqrt[4]{a^4-b^4}$, где a и b – длины данных отрезков и $a>b$.

Решение. Представим выражение $x=\sqrt[4]{a^4-b^4}$ в виде: $\sqrt{\sqrt{a^4-b^4}}=\sqrt{\sqrt{\left(a^2-b^2\right)\left(a^2+b^2\right)}}=\sqrt{\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{a^2+b^2}}$. Далее строим последовательно:

1) отрезок $x_1=\sqrt{a^2-b^2}$ (см. задачу 9);

2) отрезок $x_2 = \sqrt{a^2 + b^2}$ (см. задачу 8);

3) отрезок $x = \sqrt{x_1 \cdot x_2}$ (см. задачу 7), отрезок x будет искомым.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Постройте образ Δ ABC при осевой симметрии относительно прямой l, которая не параллельна ни одной стороне треугольника.

2. Постройте образ Δ ABC при осевой симметрии относительно прямой l, которая параллельна стороне AB треугольника.

3. Постройте образ Δ ABC при центральной симметрии с центром в точке A (т. A – одна из вершин треугольника). Рассмотрите случай, когда т. O (центр симметрии) находится вне треугольника.

4. Постройте образ Δ ABC при гомотетии с коэффициентом 2 (центр гомотетии выбирать произвольно). Рассмотреть случай, когда центр гомотетии совпадает с вершиной A.

5. Постройте образ Δ ABC при гомотетии с коэффициентом 1,5, если центр гомотетии совпадает с точкой пересечения высот треугольника.

6. Дан круг радиуса r = 4 см. Постройте его образ при симметрии в точке O, если:

   а) точка O принадлежит кругу;

   б) точка O не принадлежит кругу;

   в) точка O является его центром.

   В каждом из этих случаев выделите штриховкой фигуры, являющиеся:

   1) пересечением данного круга и его образа;

   2) объединением данного круга и его образа.

7. Сколько центров симметрии имеет квадрат? Имеет ли центр симметрии отрезок, луч, пара пересекающихся прямых?

8. Даны точки A, B и M. Постройте точку, симметричную точке M относительно середины отрезка AB.

9. Существуют ли фигуры, не имеющие центр симметрии?

10. Изобразите три фигуры, имеющие ось симметрии.

11. Существуют ли фигуры, не имеющие оси симметрии?

12. Сколько осей имеет квадрат, равносторонний треугольник, отрезок, прямая?

13. Даны буквы А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, К, М, Н, О, П, Т, Ф, Х. Какие из этих букв имеют:

1) центр симметрии;

2) ось симметрии?

14. Напишите печатными заглавными буквами русские слова, которые имеют:

1) вертикальную ось симметрии;

2) горизонтальную ось симметрии.

15. Постройте треугольник по двум сторонам и углу между ними.

16. Постройте треугольник по трем сторонам.

17. Постройте с помощью циркуля и линейки прямоугольник, у которого известны его стороны a и b.

18. Постройте с помощью циркуля и линейки:

1) прямоугольник по диагонали и одной из сторон;

2) квадрат со стороной a;

3) квадрат с заданной диагональю d;

4) ромб с заданными диагоналями d_1 *и* d_2;

5) ромб по углу и диагонали, исходящей из вершины этого угла;

6) ромб по стороне a и одному из углов;

7) ромб по стороне a и диагонали d.

19. Постройте отрезки, заданные следующими формулами:

а) $x = \sqrt{\dfrac{abc}{d}}$; б) $x = \sqrt{a^3 - b^3}$;

в) $x = \sqrt{a^2 + b^2}$; г) $x = \sqrt{a^2 - b^2}$;

д) $x = \dfrac{a \cdot в}{c}$.

ЛИТЕРАТУРА

1.Аматова, Г.М. Математика [Текст] : учеб. пособие для факультетов подготовки бакалавров образования в области начального образования и учителей начальных классов пед. вузов./ Г.М. Аматова, М.А. Аматов. – М.: «Московский психолого-социальный ин-т», 1999. – 488 с.

2.Воронина, Л.В. Теоретические основы математического образования в период детства [Текст] : учеб. пособие / Л.В. Воронина, Г.В. Воробьева, Е.А. Утюмова. – Екатеринбург, 2013. – 348 с.

3.Воронина, Л.В. Основы математики [Текст] : учеб. пособие / Л.В. Воронина, Е.А. Утюмова. – Екатеринбург, 2015. – 194 с.

4.Лаврова, Н.Н. Задачник-практикум по математике [Текст] : учеб. пособие / Н. Н. Лаврова, Л.П. Стойлова. – М.: Просвещение, 1985. – 183 с.

5.Михайлова, З.А. Теории и технологии математического развития детей дошкольного возраста [Текст]: учеб. пособие / З.А. Михайлова, Е.А. Носова, А.А. Столяр и др. – СПб.: «ДЕТСТВО-ПРЕСС», 2008. – 384 с.

6.Стойлова, Л.П. Математика [Текст]: учеб. пособие для студентов сред. пед. учеб. заведений / Л.П. Стойлова. – М.: Академия, 1998. – 464с.

7.Стойлова, Л. П. Основы начального курса математики. [Текст] / Л.П. Стойлова, А.М. Пышкало. – М.: Просвещение, 1988. – 289 с.

Учебное издание

Людмила Валентиновна Воронина
Галина Васильевна Воробьева
Галина Павловна Калинина
Екатерина Александровна Утюмова

Основы математики
Часть 2

Компьютерный набор: Л.В. Воронина, Г.В. Воробьева, Г.П. Калинина, Е.А. Утюмова
Редактирование: Л.В. Воронина, Г.П. Калинина
Макетирование: Л.В. Воронина, Г.П. Калинина
Корректура: Л.В. Воронина, Г.П. Калинина

Подписано в печать 26.08.2015. Формат 60x84x1/16
Гарнитура «Times». Бумага для множ. апп. Печать ризограф.
Усл. печ. л. 14,47 п.л. Тираж 500 экз. Заказ

Отпечатано с готового оригинал-макета в ФГБОУ ВПО
«Уральский государственный педагогический университет»
Отдел множительных систем
Адрес: 620017, г. Екатеринбург, пр. Космонавтов, 26